TEMA 1 .- ANÀLISI VECTORIAL

1.1 Introducció

MAGNITUDS ESCALARS I VECTORIALS

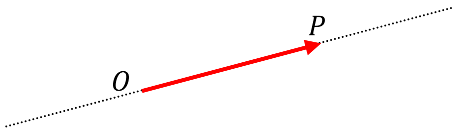
En els conceptes de la física ens trobarem amb magnituds de dos tipus: ***escalars i vectorials***.

Les ***magnituds escalars*** són aquelles que queden totalment determinades amb un sol nombre real i una unitat de mesura.

> *Exemples són la longitud d'un fil, la massa d'un cos o el temps passat entre dos successos. Se les pot representar mitjançant segments agafats sobre una recta a partir de un origen i de longitud igual al nombre real que indica la mesura.*
>
> *Altres exemples de magnituds escalars són la densitat; el volum; el treball mecànic; la potencia; la temperatura.*

A les ***magnituds vectorials*** no se les pot determinar completament mitjançant un nombre real i una unitat de mesura. Per exemple, per donar la velocitat d'un mòbil en un punto del espai, a més a més de la intensitat s´ha d'indicar la direcció del moviment (donada per la recta tangent a la trajectòria en cada punt) i el sentit del moviment en aquesta direcció (donat per les dues possibles orientacions de la recta). Al igual que amb la velocitat passa amb las forces: els seus efectes depenen no sols de la intensitat sinó també de les direccions i sentits en que actuen. Altres exemples de magnituds vectorials són l'acceleració, la quantitat de moviment, el camp elèctric, el camp magnètic.

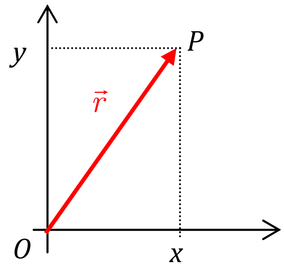
Per representar les magnituds vectorials s'utilitzen ***vectors*** (segments orientats), segments de recta determinats entre dos punts extrems donats en un cert ordre.



Hi han diferents maneres de definir un vector, des de el punt de vista matemàtic, geomètric o físic. En realitat la definició es una barreja de tots i podem dir que:

Un vector és un element d'un espai vectorial, definit per les seves propietats d'invariança sota un canvi de coordenades.

En el espai bidimensional R^2 un vector vindrà representat per dos nombres, es a dir, si volem indicar un pas en aquest espai, des d'un punt O a un punt P, indicarem que ens movem des de (0,0) fins a (x,y). Però inventem un únic símbol matemàtic per representar-ho, el vector $\vec{r}$



Però, si utilitzem un sistema de coordenades diferent aquests dos nombres canvien a (x',y'), però que succeeix amb el vector $\vec{r}$?.

El vector és el mateix però representat per dos valors numèrics diferents .

$$\vec{r} = \vec{r}' = (x', y').$$

La propietat essencial de tot el càlcul vectorial es que els vectors i els resultats de les operacions entre ells tenen un significat intrínsec independent de qualsevol sistema de coordenades. Aquest significat intrínsec és evident mentre els vectors i les seves operacions es defineixen geomètricament, però deixa de ser-ho quan utilitzem les components dels vectors respecte els sistemes de coordenades. Quan es vol definir un vector a partir de les seves components, s'ha de tenir en compte que la definició sigui correcte, en el sentit que el vector estigui ben definit. Un segment orientat en el espai ha de mantenir la seva longitud per qualsevol sistema de coordenades.

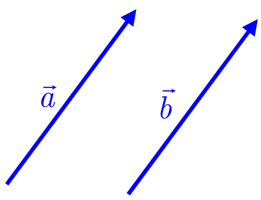
DEFINICIONS:

- S'anomena ***mòdul*** d'un vector a la longitud del segment orientat que el defineix. El mòdul és sempre un nombre positiu.

  $$|\vec{v}| = \mathrm{mod}\, \vec{v}$$

- Dos vectors són ***iguals*** (anomenats ***equipolents***) quan tenen el mateix mòdul i la mateixa direcció i sentit .

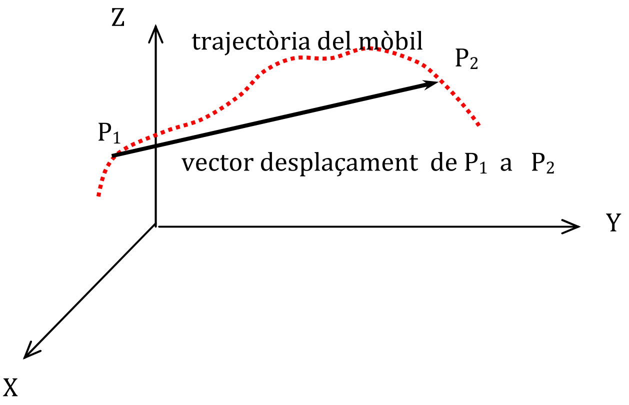
  En la figura es $\vec{a} = \vec{b}$. Aquesta definició correspon als anomenats vectors lliures, es a dir , vectors que poden lliscar en una recta i desplaçar-se paral·lelament a si mateix en l'espai. Són els que ens interessen i compleixen la relació d'equivalència



1.2 Representació geomètrica d'un vector

Quan el moviment té lloc en dues o tres dimensions el desplaçament d'una partícula té una direcció a l'espai i un mòdul.

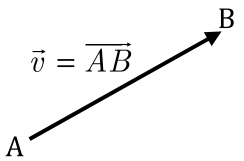
La magnitud que expressa la direcció i la distància en línia recta compresa entre dos punts de l'espai és un segment lineal anomenat ***vector desplaçament***. Es representa gràficament per una segment orientat que té la direcció del desplaçament , amb longitud proporcional a la magnitud del desplaçament.



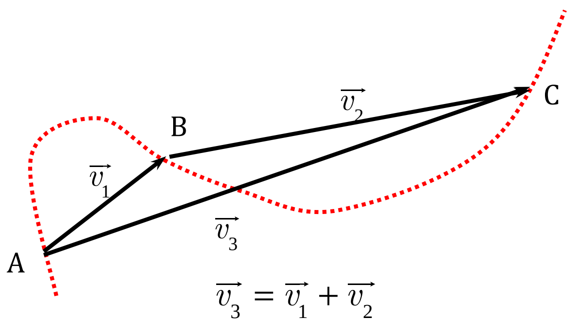
Observem que la posició d'un punt P movent-se en dues o tres dimensions no es pot caracteritzar únicament per un valor numèric (quantitat escalar).

Exemple

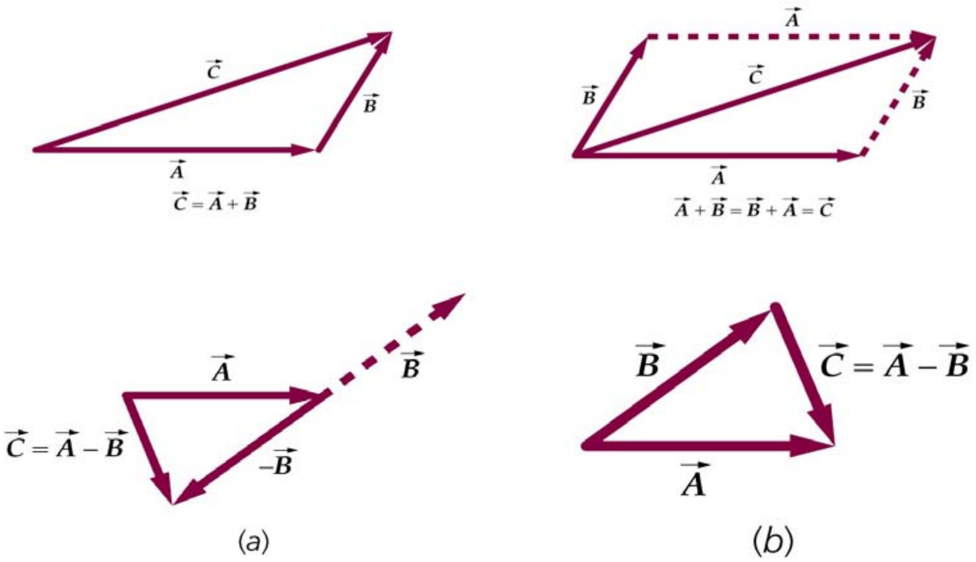
Si un vector va des d'un punt A (punt inicial) a un punt B (punt final), denotarem el vector per $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$



Suposem que el vector $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB}$ representa el desplaçament d'un punt a lo llarg d'una trajectòria . Si a continuació el punt es mou fins el punt C el nou vector desplaçament serà $\vec{v}_2 = \overrightarrow{BC}$. Llavors el vector $\vec{v}_3 = \overrightarrow{AC}$ donarà el desplaçament total del punt P i direm que $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$



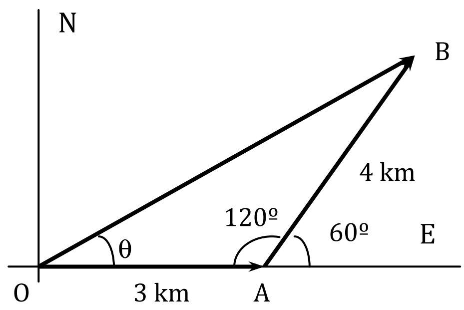
Observem que els vectors són magnituds físiques que tenen mòdul i direcció i es sumen i resten com els desplaçaments



SUMA I RESTA DE VECTORS

Exemple

Un home camina 3 km cap a l'est i després 4 km a 60° al nord-est. Determineu el desplaçament total.



Observem que el desplaçament total ve representat pel vector $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

Per determinar el desplaçament que significa el vector $\overrightarrow{OB}$ haurem d'estudiar el triangle OAB.

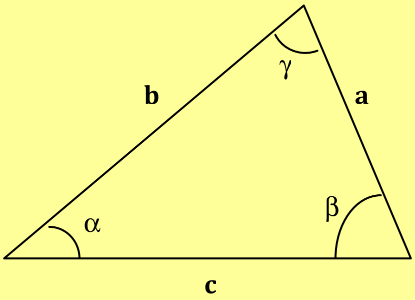
Aquest triangle no és un triangle rectangle i no podem aplicar el teorema de Pitàgores.

Podem determinar el mòdul del vector $\overrightarrow{OB}$ i l'angle que forma amb la direcció Est, aplicant altres teoremes relatius als triangles, com són el teorema del cosinus:

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2{\cdot}3{\cdot}4\cos 120^{\circ}} = \sqrt{37}\ cm$$

i el teorema del sinus: $\dfrac{\sin\theta}{4}=\dfrac{\sin 120^{o}}{\sqrt{37}} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta=\dfrac{4}{\sqrt{37}}\cdot\sin 120^{o}$

TEOREMES DEL SINUS I DEL COSINUS



Teorema del sinus:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

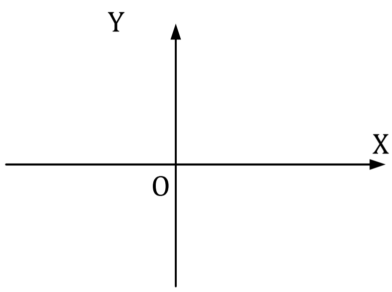
Teorema del cosinus:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

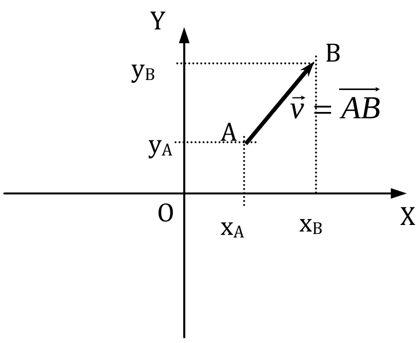
1.3 Vectors en dues dimensions

Suposem un conjunt de vectors confinats en un pla coordenat fix.

Suposarem el sistema de coordenades rectangulars (X,Y)



Podem assignar coordenades als punts inicials i finals de cada vector en aquest pla. Es a dir, podem assignar parelles de nombres reals a aquests punts.



Punt A (x_A, y_A)

Punt B (x_B, y_B)

Vector $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(v_1,v_2)=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A)$

Direm que v_1 és la coordenada horitzontal i v_2 és la coordenada vertical del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Representarem els vectors del pla mitjançant parelles de nombres reals: $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$

D'aquesta manera les afirmacions sobre els vectors es poden traduir al llenguatge de l'àlgebra (***Àlgebra Vectorial***). L'avantatge de treballar amb el llenguatge de l'àlgebra sobre el llenguatge geomètric en que les deduccions seran molt més senzilles i que a l'hora de generalitzar les deduccions a més dimensions l'enfocament algebraic és més directe.

L'espai vectorial de dues dimensions V^2 és el conjunt de totes les parelles ordenades de nombres reals $\langle x, y \rangle$, anomenades vectors, que cumpleixin els següents axiomes:

- Suma de vectors: Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ i $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ són vectors, llavors:

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

- Multiplicació de vectors per escalars:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \langle \lambda a_1, \lambda a_2 \rangle$$

Als nombres a_1 i a_2 , $\langle a_1, a_2 \rangle$, se'ls anomena components del vector.

Observem que per sumar dos vectors sumem les seves components i que per multiplicar un vector per un escalar hem de multiplicar cada component per l'escalar.

Exemple:

Sigui $\vec{a} = \langle 3, -2 \rangle \quad i \quad \vec{b} = \langle -6, 7 \rangle$

Determineu : $\vec{a} + \vec{b} \quad ; \quad 4\vec{a} \quad ; \quad 2\vec{a} + 3\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle 3 - 6, -2 + 7 \rangle = \langle -3, 5 \rangle \langle -3, 5 \rangle$$
$$4\vec{a} = \langle 4 \cdot 3, 4 \cdot (-2) \rangle = \langle 12, -8 \rangle$$
$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2\langle 3, -2 \rangle + 3\langle -6, 7 \rangle = \langle 6, -4 \rangle + \langle -18, 21 \rangle = \langle -12, 17 \rangle$$

En un espai vectorial de dues dimensions podem definir:

vector zero $\vec{0}$ com: $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$

vector oposat del vector $\vec{a}$, $-\vec{a} = \langle -a_1, -a_2 \rangle$

Mòdul d'un vector $\vec{a}$, que representarem per: $|\vec{a}|$ és un nombre real donat per:

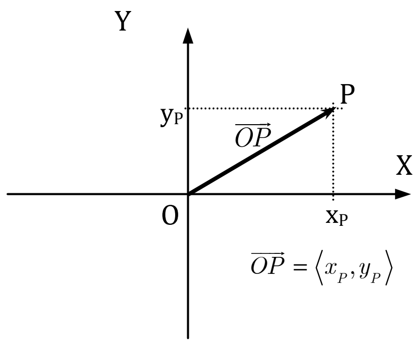
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Aquest valor és la longitud de qualsevol segment de recta dirigit que representa al vector $\vec{a}$.

Observem que : $|\vec{a}| \geq 0$ i que $|\vec{a}| = 0$ únicament quan $\vec{a} = \langle 0, 0 \rangle$.

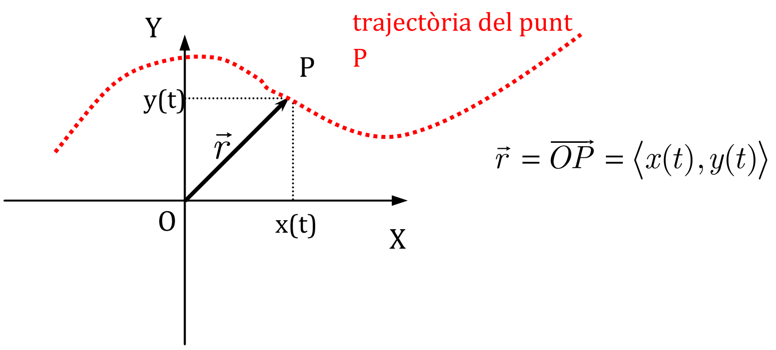
Vector de Posició:

Si P és un punt del pla coordenat i O és l'origen, llavors el vector $\overrightarrow{OP}$ s'anomena vector de posició de P.



Si el punt P s'està movent en el pla seguit una determinada trajectòria, la posició del punt la podrem identificar mitjançant un ***vector de posició*** $\vec{r}$.

Com aquest vector anirà canviant a mesura que passa el temps, les seves coordenades seran funcions de t, $\overrightarrow{r(t)} = \langle x(t), y(t) \rangle$



Abans d'abordar l'estudi del moviment del punt P coneguda la trajectòria que segueix, és a dir, determinar la seva velocitat i accerelació :

$$\overrightarrow{v(t)} = \langle v_x(t), v_y(t) \rangle \quad ; \quad \overrightarrow{a(t)} = \langle a_x(t), a_y(t) \rangle$$

estudiarem algunes propietats dels vectors.

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ són tres vectors qualsevol de V^2 llavors es compleix:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Es diu que dos vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ de V^2 diferents de zero tenen:

- la mateixa direcció si $\vec{b} = c{\cdot}\vec{a}$ per algun valor escalar *c > 0*
- direcció oposada si $\vec{b} = c{\cdot}\vec{a}$ per algun valor escalar *c < 0*

Si $\vec{a}$ és un vector i c un escalar, $c \in R$, llavors: $|c{\cdot}\vec{a}| = |c|{\cdot}|\vec{a}|$

Demostració: Sigui $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, llavors $c{\cdot}\vec{a} = \langle c{\cdot}a_1, c{\cdot}a_2 \rangle$;

$$|c{\cdot}\vec{a}| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} = \sqrt{c^2\left(a_1^2 + a_2^2\right)} = |c|{\cdot}\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2\right)} = |c|{\cdot}|\vec{a}|$$

Exemple : Sigui $\vec{a} = \langle 3, 4 \rangle$ i c= 10 , llavors

$$|10{\cdot}\vec{a}| = \sqrt{(10{\cdot}3)^2 + (10{\cdot}4)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

$$|c|{\cdot}|\vec{a}| = 10{\cdot}\sqrt{\left(3^2 + 4^2\right)} = 10{\cdot}5 = 50$$

Si $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són vectors de V^2 i c i d són escalars, $c, d \in R$ llavors:

- $c\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = c\cdot\vec{a} + c\cdot\vec{b}$
- $(c + d)\cdot\vec{a} = c\cdot\vec{a} + d\cdot\vec{a}$
- $(c\cdot d)\cdot\vec{a} = c\cdot(d\cdot\vec{a}) = d\cdot(c\cdot\vec{a})$
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Vectors especials: $\hat{i}, \hat{j}$ es defineixen per: $\hat{i} = \langle 1, 0\rangle$; $\hat{j} = \langle 0, 1\rangle$

Aquests vectors s'utilitzen per denotar d'una altra manera els vectors en dues dimensions.

Si : $\vec{a} = \left\langle a_1, a_2 \right\rangle$ podem escriure:

$$\vec{a} = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle = a_1\cdot\langle 1, 0\rangle + a_2\cdot\langle 0, 1\rangle = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$$

Combinació lineal dels vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$

Si expressem els vectors $\vec{a}, \vec{b}$ com combinació lineal dels vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} \quad \text{i} \quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$$

les regles de la suma , resta i multiplicació per un escalar de vectors es poden expressar com:

$$\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j}\right) + \left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j}\right) = \left(a_1 + b_1\right)\hat{i} + \left(a_2 + b_2\right)\hat{j}$$

$$\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j}\right) - \left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j}\right) = \left(a_1 - b_1\right)\hat{i} + \left(a_2 - b_2\right)\hat{j}$$

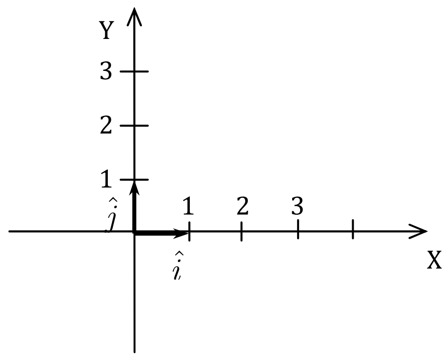
$$c\cdot\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j}\right) = \left(c\cdot a_1\right)\hat{i} + \left(c\cdot a_2\right)\hat{j}$$

Exemple: Siguin els vectors: $\vec{a} = 5\hat{i} + \hat{j}$; $\vec{b} = 4\hat{i} - 7\hat{j}$

Expressar el vector : $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ com una combinació lineal de $\hat{i}$, $\hat{j}$.

$$\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\cdot\left(5\hat{i} + \hat{j}\right) - 2\cdot\left(4\hat{i} - 7\hat{j}\right) = (15-8)\,\hat{i} + (3+14)\,\hat{j} = 7\hat{i} + 17\hat{j}$$

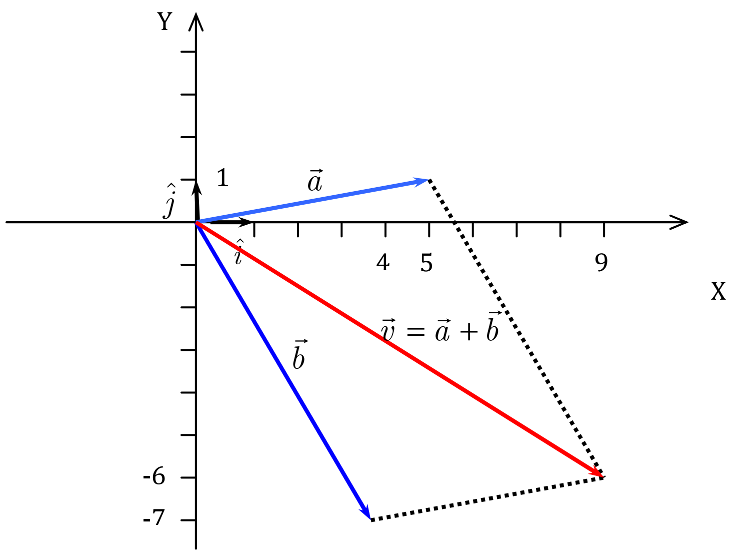
Vectors unitaris: Els vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$ són unitaris ja que el seu mòdul és la unitat.



$$\left|\hat{i}\right| = \left|\langle 1,0\rangle\right| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left|\hat{j}\right| = \left|\langle 0,1\rangle\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

Exemple: La representació gràfica dels vectors $\vec{a} = 5\hat{i} + \hat{j}$; $\vec{b} = 4\hat{i} - 7\hat{j}$ i la del seu vector suma $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \left(5\hat{i} + \hat{j}\right) + \left(4\hat{i} - 7\hat{j}\right) = 9\hat{i} - 6\hat{j}$ serà:



TecnoCampus Mataró-Maresme

1.3.1 BASE D'UN ESPAI VECTORIAL

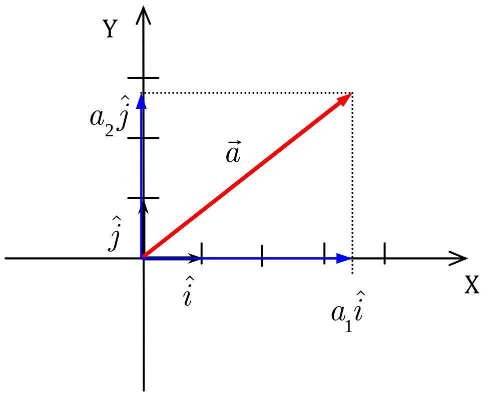
Al conjunt dels dos vectors unitaris $\hat{i}$, $\hat{j}$, es diu que el ***una base*** del espai vectorial V^2 .

Qualsevol vector d'un espai vectorial es pot representar com una combinació lineal dels vectors d'una base.

Si representem un vector $\vec{a}$ com a combinació lineal de la base $\hat{i}$, $\hat{j}$

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$$

podem interpretar que el vector $\vec{a}$ és la suma de dos vectors $a_1\hat{i}$ i $a_2\hat{j}$.



Al valor a_1 se l'anomena ***component horitzontal*** del vector $\vec{a}$, i a a_2 ***component vertical*** del vector $\vec{a}$.

En determinades circumstàncies és necessari trobar un vector de mòdul unitat en una determinada direcció.

Sigui $\vec{a}$ un vector diferent del vector nul. $\vec{a} \neq \vec{0}$

Llavors el vector: $\hat{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

és un vector unitari amb la mateixa direcció que el vector del vector $\vec{a}$

Exemple : Sigui el vector $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$. Trobar un vector unitari en la direcció del vector $\vec{a}$.

Determinarem el mòdul del vector: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Llavors: $\overrightarrow{u_a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j}}{5} = \dfrac{3}{5}\hat{i} - \dfrac{4}{5}\hat{j} = 0.6\hat{i} - 0.8\hat{j}$

Comprovem que és un vector unitari:

$$\left|\overrightarrow{u_a}\right| = \sqrt{0.6^2 + \left(-0.8\right)^2} = \sqrt{0.36 + 0.64} = \sqrt{1} = 1$$

1.4 Vectors en tres dimensions

Per estudiar el moviment d'una partícula a l'espai és necessari introduir un sistema de coordenades tridimensional.

Una terna ordenada de nombres reals *(a, b, c)* és un conjunt de tres nombres {*a,b,c*} ordenats de forma que considerem *a* com el primer, *b* com el segon i *c* com el tercer nombre.

El conjunt total de ternes sol representar-se per : R^3

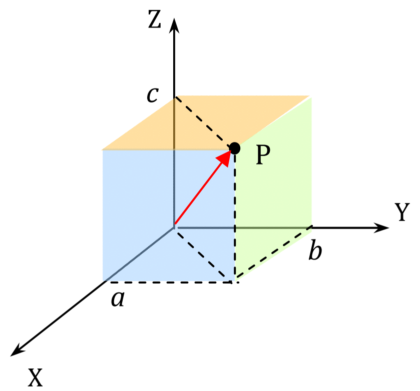
Per poder localitzar els punts a l'espai, escollim un punt fix *O* (anomenat origen) i considerem tres rectes coordenades mútuament perpendiculars entre sí (anomenades eix X , eix Y i eix Z) amb origen comú a *O* .

Si P és un punt de l'espai, la seva projecció en l'eix X val *a* , que direm que és la coordenada *x* del punt P. (Podem pensar que *a* és la distància del punt al pla YZ)

Anàlogament, les coordenades *b* i *c* són les projeccions del punt sobre els eixos Y i Z respectivament.

- *a* , és la coordenada *x* del punt P.
- *b* , és la coordenada *y* del punt P.
- *c* , és la coordenada *z* del punt P.

Utilitzarem la terna *(a, b, c)* per denotar les coordenades de P .



Inversament a cada terna ordenada *(a,b,c)* de nombres reals li correspon un punt P de coordenades *a* ,*b* i *c* .

La correspondència un a un entre els punts de l'espai i les ternes ordenades de nombres reals s'anomena ***Sistema coordenat rectangular en tres dimensions***.

El sistema V^3 de vectors en tres dimensions es defineix com la col·lecció de totes les ternes ordenades $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ de nombres reals, anomenades vectors, subjectes a les propietats de suma i producte per un escalar vistes anteriorment en l'estudi dels vectors en dues dimensions.

Els nombres a_1 , a_2 i a_3 s'anomenen ***components dels vector*** $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

Sigui $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$; $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ dos vectors i c un escalar , $c \in \mathbb{R}$.

Definim :

- La ***suma de vectors*** en tres dimensions com:

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

- El ***producte d'un vector per un escalar*** com:

$$c \cdot \vec{a} = c \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3 \rangle$$

- El ***vector zero*** com:

$$\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

- El ***vector oposat***:

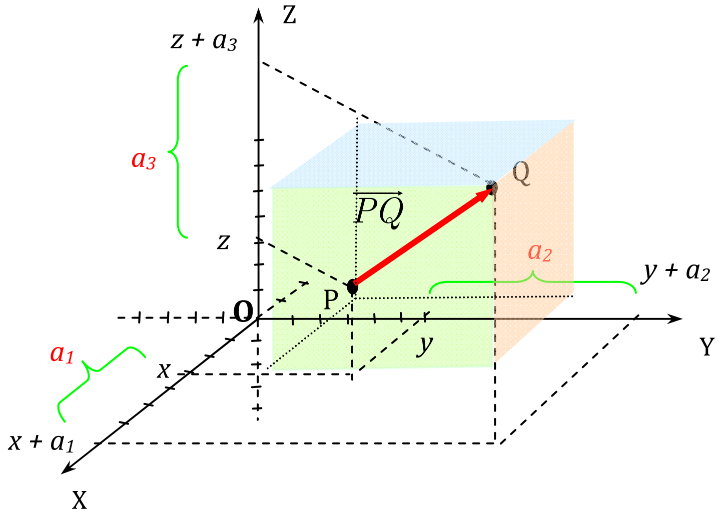
$$-\vec{a} = \langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$$

- La ***resta de vectors*** com:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

Les propietats dels vectors en dues dimensions es poden generalitzar sense dificultats a V^3, simplement agafant la tercera component.

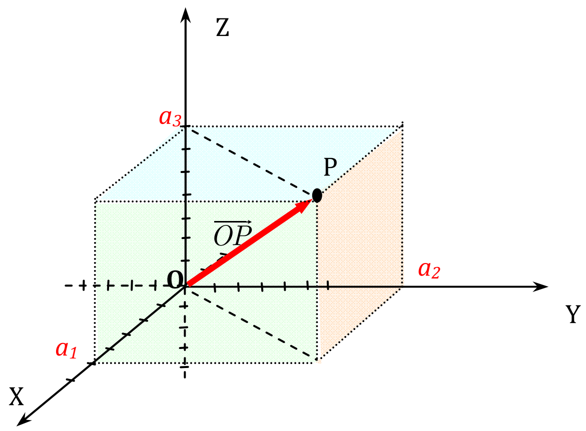
Un vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \in V^3$ es pot representar en un sistema de coordenades rectangulars mitjançant un segment de recta orientat $\overrightarrow{PQ}$, amb un punt inicial arbitrari: $P(x, y, z)$ i un punt final : $Q(x + a_1,\ y + a_2,\ z + a_3)$.



Si en l'esquema anterior substituïm P de coordenades *(x,y,z)* per l'origen O de coordenades *(0,0,0)* i substituïm el punt Q per un punt P de coordenades *(* a_1, a_2, a_3 *)*, llavors el vector de posició $\overrightarrow{OP}$ tindrà com components :

$$\overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

El vector que va des de l'origen al punt P s'anomena ***vector de posició del punt P.***



Definim el mòdul d'un vector com la seva longitud en qualsevol de les seves representacions geomètriques:

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \qquad\qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Direm que dos vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ diferents del vector zero tenen ***la mateixa direcció***, si existeix un nombre real $c \in R$ tal que : $\vec{b} = c \cdot \vec{a}$

Si $c > 0$ els sentits dels dos vectors també és el mateix .

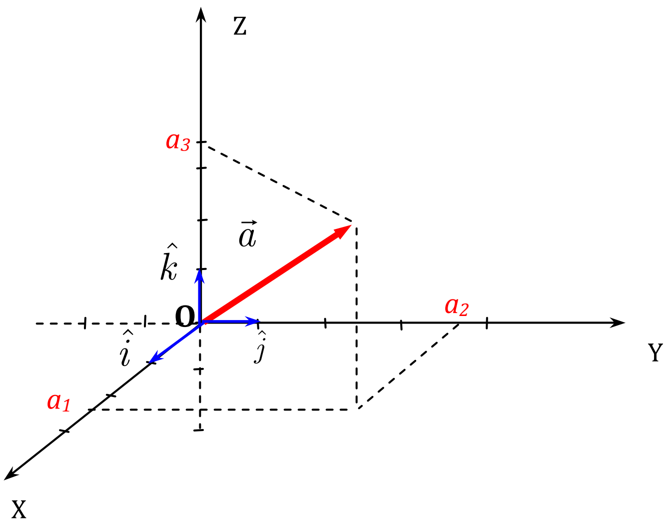
Si $c < 0$ els sentits són oposats.

Es diu que $\vec{a}$ és un vector unitari si el seu mòdul és la unitat: $|\vec{a}| = 1$

Els vectors unitaris $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ de components:

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$
$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$
$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Són vectors importants ja que qualsevol vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es pot expressar com una combinació lineal dels vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.



$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1 \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

La traducció de les regles de la suma, resta i producte per un escalar amb la notació $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ és immediata i igual que la feta pels vectors en dues dimensions.

1.5 Producte escalar de vectors

Siguin $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ i $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ dos vectors de V^3.

Definim el seu producte escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ com el nombre real següent:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

PROPIETATS

Siguin $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ i $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ tres vectors de V^3, i sigui λ un nombre real , $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors:

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\lambda\left(\vec{b}\right)$
- $\vec{0}\cdot\vec{a} = 0$

A partir de les propietats dels nombres reals es poden demostrar aquestes propietats.

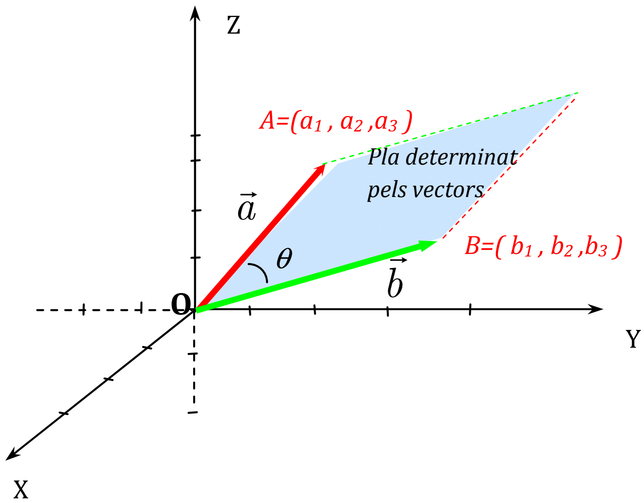
Demostrem a mode d'exemple la tercera de les propietats:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle\cdot\left(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle c_1, c_2, c_3 \rangle\right) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle\cdot\left(\langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle\right) =$$
$$a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 =$$
$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right) + \left(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

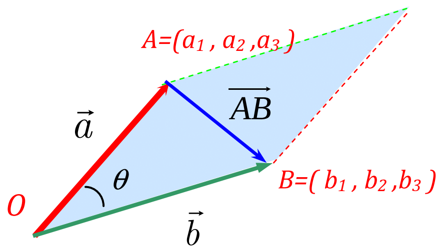
Siguin $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ dos vectors diferents de zero ,

i sigui θ l'angle que formen, llavors resulta que:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Per demostrar-ho observarem el vector $\overrightarrow{AB}$, que juntament amb els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ formen un triangle



Sabem que:

$$\overrightarrow{AB}=\langle b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Aplicant el teorema del cosinus: $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

Llavors: $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\underbrace{a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2}_{\cancel{K}}-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3=\underbrace{a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2}_{\cancel{K}}-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Quedant:

$$+\cancel{2}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=\cancel{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\underbrace{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)}_{\vec{a}\cdot\vec{b}}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

D’aquesta manera podrem calcular ***l’angle format per dos vectors*** a l’espai:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Direm que ***dos vectors són ortogonals*** si el seu producte escalar és zero, sense que cap dels dos sigui el vector zero.

Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ llavors $\vec{a} \perp \vec{b}$

Si ho apliquem als vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ que sabem que són ortogonals mútuament:

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=|\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^{o}=1\cdot1\cdot1=1$$
$$\hat{j}\cdot\hat{j}=|\hat{j}||\hat{j}|\cos 0^{o}=1\cdot1\cdot1=1$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k}=|\hat{k}||\hat{k}|\cos 0^{o}=1\cdot1\cdot1=1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j}=|\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^{o}=1\cdot1\cdot0=0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{k}=|\hat{i}||\hat{k}|\cos 90^{o}=1\cdot1\cdot0=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{k}=|\hat{j}||\hat{k}|\cos 90^{o}=1\cdot1\cdot0=0$$

Per tant si expressem els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en funció de $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:

$$\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k} \quad ; \quad \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$$

el seu producte escalar serà:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\right)\cdot\left(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\right)=\\
&a_1\cdot b_1\left(\underbrace{\hat{i}\cdot\hat{i}}_{1}\right)+a_1\cdot b_2\left(\cancel{\hat{i}\cdot\hat{j}}\right)+a_1\cdot b_3\left(\cancel{\hat{i}\cdot\hat{k}}\right)+\\
&a_2\cdot b_1\left(\cancel{\hat{j}\cdot\hat{i}}\right)+a_2\cdot b_2\left(\underbrace{\hat{j}\cdot\hat{j}}_{1}\right)+a_2\cdot b_3\left(\cancel{\hat{j}\cdot\hat{k}}\right)+\\
&a_3\cdot b_1\left(\cancel{\hat{k}\cdot\hat{i}}\right)+a_3\cdot b_2\left(\cancel{\hat{k}\cdot\hat{j}}\right)+a_3\cdot b_3\left(\underbrace{\hat{k}\cdot\hat{k}}_{1}\right)=\\
&a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3
\end{aligned}$$

Tal com l'havíem definit.

1.5.1 PROJECCIÓ D'UN VECTOR EN LA DIRECCIÓ D'UN ALTRE

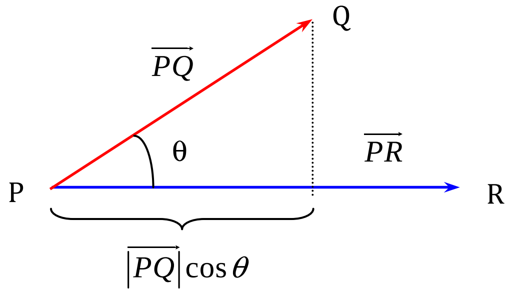
Una característica important del producte escalar de vectors és que ens permet conèixer la projecció d'un vector en la direcció d'un altre.

Siguin $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ dos vectors de V^3 amb el mateix punt inicial.

Si S és la projecció del punt Q sobre la recta que passa per P i R al nombre real:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta$$

se l'anomena projecció del vector $\overrightarrow{PQ}$ en la direcció del vector $\overrightarrow{PR}$



Si fem el producte escalar de $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PQ}$ resulta que:

$$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left|\overrightarrow{PR}\right|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PR}\right|}=\frac{\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PR}\right|}\cdot\overrightarrow{PQ}=\widehat{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

Per tant:

La projecció del vector $\overrightarrow{PQ}$ en la direcció del vector $\overrightarrow{PR}$ és igual al producte escalar del vector que volem projectar per un vector unitari en la direcció en que volem projectar.

Exemples.-

- Sigui el vector $\vec{a}=4\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$ i $\vec{b}=6\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$

  El seu producte escalar és: $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot6-1\cdot3-5\cdot2=24-3-10=11$

  El mòdul de cada vector és: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{16+1+25}=\sqrt{42}$

  $$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$$

Vector unitari en direcció de $\vec{a}$: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{42}} = \frac{4}{\sqrt{42}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{42}}\hat{j} + \frac{5}{\sqrt{42}}\hat{k}$

Vector unitari en direcció de $\vec{b}$: $\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}}{7} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$

L'angle que formen :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{42}\cdot 7} = 0.2425 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos 0.2425 = 76^{\circ}$$

La projecció del vector $\vec{a}$ en la direcció de $\vec{b}$:

$$\Pr_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta = \sqrt{42}\cdot\cos 76^{\circ}$$
$$\Pr_{\vec{b}}\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\hat{b} = \left(4\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}\right) = 4\cdot\frac{6}{7} - 1\cdot\frac{3}{7} + 5\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{11}{7}$$

- $\vec{A}\cdot\hat{i} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}\right) = \left(A_x\hat{i}\right)\cdot\left(\hat{i}\right) + \cancel{\left(A_y\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}\right)} + \cancel{\left(A_z\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}\right)} = A_x$

- $$\vec{A}\cdot\vec{A} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)\cdot\left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) =$$
$$\left(A_x\hat{i}\right)\cdot\left(A_x\hat{i}\right) + \cancel{\left(A_x\hat{i}\right)\cdot\left(A_y\hat{j}\right)} + \cancel{\left(A_x\hat{i}\right)\cdot\left(A_z\hat{k}\right)} +$$
$$\cancel{\left(A_y\hat{j}\right)\cdot\left(A_x\hat{i}\right)} + \left(A_y\hat{j}\right)\cdot\left(A_y\hat{j}\right) + \cancel{\left(A_y\hat{j}\right)\cdot\left(A_z\hat{k}\right)} +$$
$$\cancel{\left(A_z\hat{k}\right)\cdot\left(A_x\hat{i}\right)} + \cancel{\left(A_z\hat{k}\right)\cdot\left(A_y\hat{j}\right)} + \left(A_z\hat{k}\right)\cdot\left(A_z\hat{k}\right) =$$
$$A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z = A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}$$

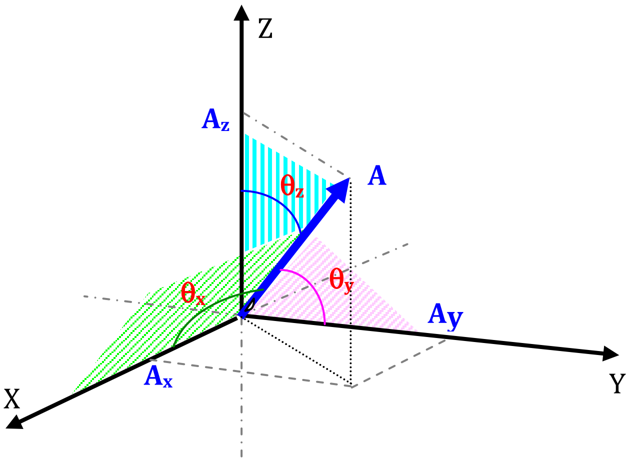
- $$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\cos 0 = |\vec{A}|^2 \quad \rightarrow \quad |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Fixem-nos com aquests dos exemples de càlcul escalar ens proporcionen informació de la longitud del vector $\vec{A}$, que representem per $A = |\vec{A}|$. Comparant obtenim:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.5.2 COSINUS DIRECTORS

Fins ara hem vist com determinar la posició d'un vector mitjançant les seves components respecte els eixos de coordenades. Hi ha una altre manera de determinar la posició del vector, i es a partir dels angles que forma el vector respecte els eixos de coordenades.



Determinem les components del vector unitari $\hat{A}$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\cdot\hat{i} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\cdot\hat{j} + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\cdot\hat{k}$$

Com

$$\vec{A}\cdot\hat{i} = A_x \ ; \ \vec{A}\cdot\hat{j} = A_y \ ; \ \vec{A}\cdot\hat{k} = A_z$$

$$\vec{A}\cdot\hat{i} = |\vec{A}|\cos\theta_x \ ; \ \vec{A}\cdot\hat{j} = |\vec{A}|\cos\theta_y \ ; \ \vec{A}\cdot\hat{k} = |\vec{A}|\cos\theta_z$$

$$\hat{A} = \frac{|\vec{A}|\cos\theta_x}{|\vec{A}|}\ \hat{i} + \frac{|\vec{A}|\cos\theta_y}{|\vec{A}|}\ \hat{j} + \frac{|\vec{A}|\cos\theta_z}{|\vec{A}|}\ \hat{k} = \cos\theta_x\ \hat{i} + \cos\theta_y\ \hat{j} + \cos\theta_z\ \hat{k}$$

Veiem que els cosinus directors d'un vector $\vec{A}$ són les components del vector unitari en la seva direcció $\hat{A}$:

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{A} = |\vec{A}|\left[\cos\theta_x\hat{i} + \cos\theta_y\hat{j} + \cos\theta_z\hat{k}\right]$$

Els cosinus directors compleixen la condició :

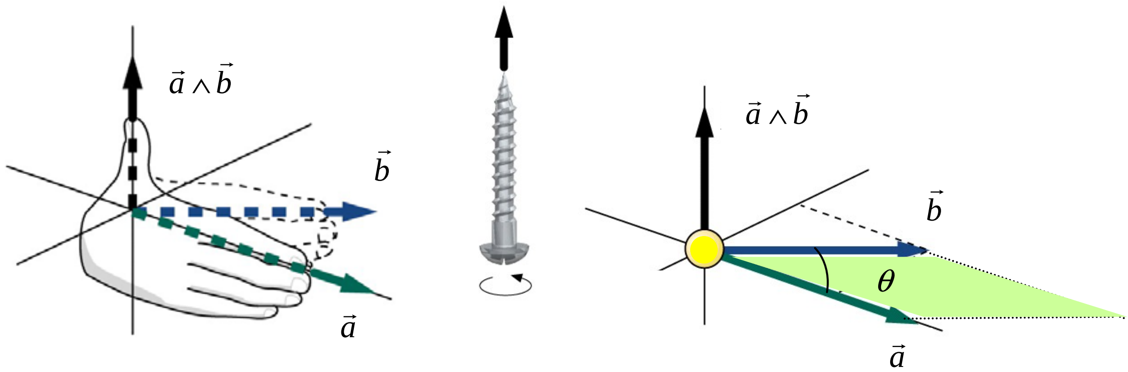
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = \left(\frac{A_x}{|\vec{A}|}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{|\vec{A}|}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{|\vec{A}|}\right)^2 = \frac{A_x^{\ 2} + A_x^{\ 2} + A_x^{\ 2}}{|\vec{A}|^2} = \frac{|\vec{A}|^2}{|\vec{A}|^2} = 1$$

1.6 Producte vectorial de vectors

Siguin $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ i $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ dos vectors de V^3.

Definim el seu producte vectorial $\vec{a} \wedge \vec{b}$ com un vector de V^3 que compleix les següents condicions:

- El seu mòdul és: $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\theta$
- La seva direcció és perpendicular al pla format pels dos vectors
- El seu sentit ve indicat per la regla de la ma dreta:



Observem que el sentit del vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ depèn de l'ordre dels vectors .

El producte vectorial $\vec{b} \wedge \vec{a}$, per la regla de la ma dreta, té sentit contrari a $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

- Per tant el producte vectorial no és commutatiu.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

Com a conseqüència de la definició, si dos vectors són paral·lels el seu producte vectorial és zero.

- Sigui $\vec{b} = c \cdot \vec{a}$, $c \in R$, llavors : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

Si dos vectors són perpendiculars , llavors l'angle $\theta = 90^\circ$, 270° i $\sin\theta = \pm 1$

per tant:

- Si $\vec{a} \perp \vec{b}$ llavors $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \pm|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|$

Si expressem els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en funció de $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \quad ; \quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

per calcular el producte vectorial tindrem en compte què:

$$\left|\hat{i} \wedge \hat{i}\right| = 0 \quad ; \quad \left|\hat{j} \wedge \hat{j}\right| = 0 \quad ; \quad \left|\hat{k} \wedge \hat{k}\right| = 0$$

$$\left|\hat{i} \wedge \hat{j}\right| = \left|\hat{i}\right|\left|\hat{j}\right|\sin 90^{o} = 1{\cdot}1{\cdot}1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad \hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$

$$\left|\hat{j} \wedge \hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right|\left|\hat{i}\right|\sin 270^{o} = \left|1{\cdot}1{\cdot}(-1)\right| = \left|-1\right| \qquad \Rightarrow \quad \hat{j} \wedge \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\left|\hat{i} \wedge \hat{k}\right| = \left|\hat{i}\right|\left|\hat{k}\right|\sin 270^{o} = \left|1{\cdot}1{\cdot}(-1)\right| = \left|-1\right| \qquad \Rightarrow \quad \hat{i} \wedge \hat{k} = -\hat{j}$$

$$\left|\hat{k} \wedge \hat{i}\right| = \left|\hat{k}\right|\left|\hat{i}\right|\sin 90^{o} = 1{\cdot}1{\cdot}1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$

$$\left|\hat{j} \wedge \hat{k}\right| = \left|\hat{j}\right|\left|\hat{k}\right|\sin 90^{o} = 1{\cdot}1{\cdot}1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$$

$$\left|\hat{k} \wedge \hat{j}\right| = \left|\hat{k}\right|\left|\hat{j}\right|\sin 270^{o} = \left|1{\cdot}1{\cdot}(-1)\right| = \left|-1\right| \qquad \Rightarrow \quad \hat{k} \wedge \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) \wedge \left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}\right) =$$

$$a_1b_1\Big(\underbrace{\hat{i} \wedge \hat{i}}_{0}\Big) + a_1b_2\Big(\underbrace{\hat{i} \wedge \hat{j}}_{\hat{k}}\Big) + a_1b_3\Big(\underbrace{\hat{i} \wedge \hat{k}}_{-\hat{j}}\Big) +$$

$$a_2b_1\Big(\underbrace{\hat{j} \wedge \hat{i}}_{-\hat{k}}\Big) + a_2b_2\Big(\underbrace{\hat{j} \wedge \hat{j}}_{0}\Big) + a_2b_3\Big(\underbrace{\hat{j} \wedge \hat{k}}_{\hat{i}}\Big) +$$

$$a_3b_1\Big(\underbrace{\hat{k} \wedge \hat{i}}_{\hat{j}}\Big) + a_3b_2\Big(\underbrace{\hat{k} \wedge \hat{j}}_{-\hat{i}}\Big) + a_3b_3\Big(\underbrace{\hat{k} \wedge \hat{k}}_{0}\Big) =$$

$$\left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\hat{i} + \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\hat{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\hat{k}$$

Aquesta és la definició algebraica del producte vectorial.

- $$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\hat{i} + \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\hat{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\hat{k}$$

Observant la definició algebraica ens donem compte que a través d'un determinant podem obtenir el mateix resultat:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}}_{\downarrow}\hat{i}\ -\ \underbrace{\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}}_{\downarrow}\hat{j}\ +\ \underbrace{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}_{\downarrow}\hat{k}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\overbrace{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)}^{\downarrow}\hat{i}\ -\overbrace{\left(a_1b_3-a_3b_1\right)}^{\downarrow}\hat{j}+\ \overbrace{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}^{\downarrow}\hat{k}$$

1.6.1 PROPIETATS DEL PRODUCTE VECTORIAL

Siguin $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tres vectors V^3 i m un nombre real , $m\in R$

- $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$
- $(m\vec{a})\wedge\vec{b}=m\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\vec{a}\wedge\left(m\vec{b}\right)$
- $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\wedge\vec{c}=(\vec{a}\wedge\vec{c})+\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)$
- $\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)$
- $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

Exemple

Siguin $\vec{a}=2\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$; $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$, determineu el seu producte vectorial.

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 5 & -2\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & -2\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\end{vmatrix}\hat{k}=$$

$$(8-30)\,\hat{i}-(-4-18)\,\hat{j}+(10+12)\,\hat{k}=-22\hat{i}+22\hat{j}+22\hat{k}$$

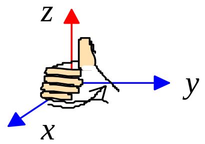
1.6.2 JUSTIFICACIÓ GRÀFICA DEL PRODUCTE VECTORIAL DELS VECTORS DE LA BASE

Si identifiquem els vectors unitaris de la base canònica per:

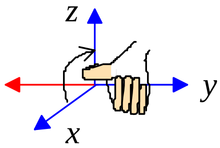
$$\hat{i} \rightarrow \hat{x} \quad ; \quad \hat{j} \rightarrow \hat{y} \quad ; \quad \hat{k} \rightarrow \hat{z}$$

el seu producte vectorial es pot il·lustrar amb la regla de la ma dreta se la manera següent:

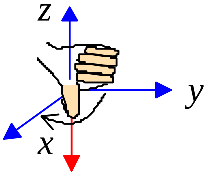
$$|\hat{x} \wedge \hat{y}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{o} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$$



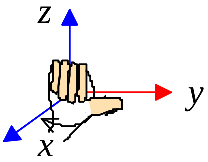
$$|\hat{x} \wedge \hat{z}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{o} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$$



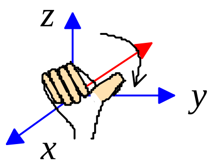
$$\left|\hat{y} \wedge \hat{x}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{\circ} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{y} \wedge \hat{x} = -\hat{z}$$



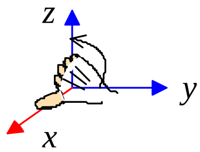
$$\left|\hat{z} \wedge \hat{x}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{\circ} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{z} \wedge \hat{x} = \hat{y}$$



$$\left|\hat{z} \wedge \hat{y}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{\circ} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{z} \wedge \hat{y} = -\hat{x}$$



$$\left|\hat{y} \wedge \hat{z}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{\circ} = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x}$$



Problemes Proposats

1.1.- Donats els vectors: $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$; $\vec{b} = -4\hat{i} + \hat{j}$

Determineu:

a) El vector suma i el seu mòdul.
b) El vector diferencia i l'angle que forma amb l'eix OX.
c) El vector $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ i el vector unitari que defineix la direcció i sentit de $\vec{c}$.

1.2.- Donats dos vectors coplanaris i concurrents amb mòduls 5 i 7 i que formen respectivament els següents angles amb l'eix OX : 60º i - 30º.
Determineu:

a) El vector suma i el seu mòdul.
b) L'angle que forma amb l'eix OX.

1.3.- Si un vector situat en el primer octant forma amb els eixos X ,Y angles de 60º i té de mòdul 4.
Determineu:

a) Les seves components.
b) L'angle que forma amb l'eix Z.

1.4.- Donats els vectors: $\vec{a}$ = (1,-1,2) i $\vec{b}$ = (-1,3,4).
Calculeu:

a) El producte escalar dels dos vectors.
b) L'angle que formen els dos vectors.
c) La projecció de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ **.**

1.5.- Donats dos vectors $\vec{a}$ = (2,1,-3) i $\vec{b}$ = (1,0,-2) trobar un vector unitari que sigui perpendicular a tots dos.

1.6.- Donats els vectors: $\vec{a}$ = **(**1,0,-1) , $\vec{b}$ = (1,3,0) , $\vec{c}$ = (2,-1,1) i $\vec{d}$ = (0,-2.-1).
Determineu:

1. – $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$
2. – $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right)$
3. – $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right)$
4. – $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right)$

1.7.- Donats els vectors $\vec{a}$ = (1,3,-2) i $\vec{b}$ = (1,-1,0).
Determineu:

a) El seu producte vectorial.
b) L' àrea del paral·lelogram que té els dos vectors com a costats.
c) Un vector $\vec{c}$, de mòdul 6, perpendicular al pla on es troben $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **.**

1.8.- Donats els vectors $\vec{a}$ = (3,-1,-2) i $\vec{b}$ = (-1,2,7).
Determineu:

a) El cosinus de l'angle que formen.

b) El sinus de l'angle que formen .

c) Les components del vector projecció de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

Solucions als problemes proposats

1.1 a) $-\hat{i} - \hat{j}$; $\sqrt{2}$

b) $7\hat{i} - 3\hat{j}$; 23.2^{o}

c) $18\hat{i} - 7\hat{j}$; $\sqrt{373}$; $\frac{18}{\sqrt{373}}\hat{i} - \frac{-7}{\sqrt{373}}\hat{j}$

1.2 a) $8.56\hat{i} + 0.83\hat{j}$; 8.6

b) 5.54º

1.3 a) $\left(2 , 2 , 2\cdot\sqrt{2}\right)$

b) 45º

1.4 a) 4

b) 71.32º

c) 1.62

1.5 $-0.82\hat{i} + 0.41\hat{j} - 0.41\hat{k}$

1.6 a) 1

b) -5

c) $3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

d) $-2\hat{i} + 21\hat{j} + 9\hat{k}$

1.7 a) $-2\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$

b) $\sqrt{24}$

c) $\vec{c} = -2.45\hat{i} - 2.45\hat{j} - 4.9\hat{k}$

1.8 a) 0.691 ; 133.6º

b) 0.7228 ; 133.6º

c) $0.35\hat{i} - 0.7\hat{j} - 2.46\hat{k}$