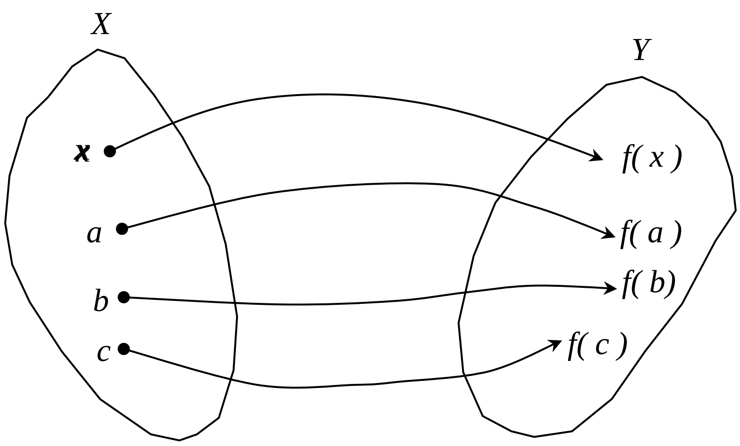
TEMA 2 .- FUNCIONS

Introducció

Un dels conceptes més útils a matemàtiques és el de funció.

- Una funció f d'un conjunt X a un conjunt Y és una regla que associa a cada element x de X un únic element y de Y.
- Una funció real de variable real és una aplicació $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, on D és un subconjunt dels nombres reals que s'anomena ***domini de f***.
- La funció f fa correspondre a cada element x de D un només un element y de $\mathbb{R}$.
- A l'element y se l'anomena ***imatge*** de x sota f i es pot escriure $y=f(x)$.
- El conjunt de les imatges es denota per $f(D)$ i es diu recorregut de f.



Exemples:

a) Sigui X el conjunt de llibres d'una biblioteca i Y el cojunt del nombres enters. Si a cada llibre li associem el seu nombre de pàgines , obtenim una funció entre X i Y.

b) Siguin tant X com Y el conjunt dels nombres reals. Si a cada nombre real x li associem el seu quadrat , x^2 , tenim una funció entre X i Y. Podem escriure una taula on a la columna de l'esquerra posem els valors del conjunt X i a la columna de la dreta les seves imatges, com veiem a continuació:

X	***Y***
x	$y=f(x)=x^2$
0	0
1	1
3	9
-2	4
2	4
4	16
25	625
-30	900
100	10000

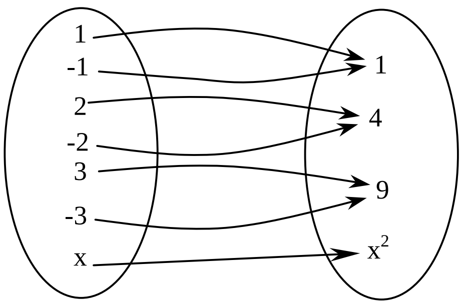
És important notar que a cada element x de X se li associa exactament una imatge $f(x)$, però elements diferents de X poden tenir la mateixa imatge a Y.

A partir d'aquest moment considerarem funció únicament a les correspondències entre conjunts de nombres reals.

X són nombres reals

Y són nombres reals

En la funció anterior $x \rightarrow f(x) = x^2$ cada nombre real té únicament una imatge, però els elements y de Y tenen tots dues anteimatges :



$$\pm a \rightarrow a^2$$
$$\pm 3 \rightarrow 9$$
$$\pm 5 \rightarrow 2$$
$$\ldots$$

Per descriure una funció f és necessari especificar la imatge $f(x)$ de cadascun dels elements x del domini.

Un mètode útil per descriure una funció és fer servir una equació, per exemple:

$$y = f(x) = x^2$$
$$L = f(s) = 2s$$
$$S = f(t) = 5t^2 - 4t + 1$$

Observem que la lletra utilitzada per indicar els valors del domini és indiferent.

La lletra (*x* ,*s*, *t*,...) que representa un nombre arbitrari del domini s'anomena ***variable independent***.

La lletra (*y*,*L*,*S*,...) que representa les imatges s'anomena ***variable dependent***.

La funció de $I : X \to X \quad i \quad \forall x \quad resulta\ que \quad I(x) = x$ s'anomena ***funció identitat***.

Una funció *f* és una ***funció constant*** si existeix un element $c \in Y$ tal que $\forall x \in X \quad f(x) = c$.

Una funció no té perquè està definida per tots els nombres reals. Ja hem dit que el subconjunt de X on està definida una funció és el seu domini.

Exemple:

$$x \quad \to \quad y = f(x) = \sqrt{x}$$

Aquesta funció no està definida pels nombres negatius. Direm que el seu domini són els nombres reals més grans o igual a zero :

$$Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \geq 0\}$$

Es defineix la ***gràfica*** d'una funció *f* com el conjunt de tots els punts $(x, y = f(x))$ en un pla coordenat , amb *x* en el domini de *f*.

Podem descriure la gràfica de *f* com el conjunt de punts *P(x,y)* tal que *y=f(x)* .

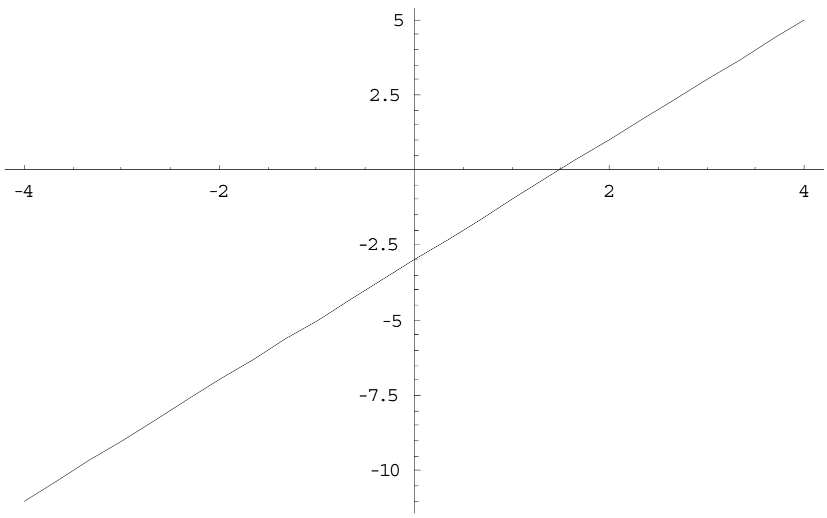
Exemples:

a) Representació gràfica de la funció y = f(x)= 2x-3

Fem una taula de valors

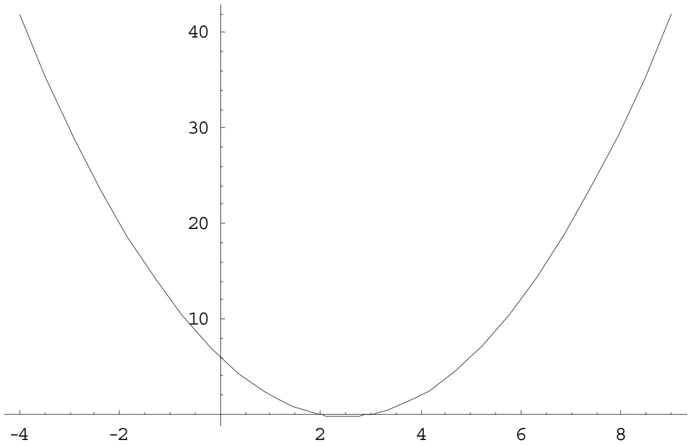
X	***Y***
x	*y=2x-3*
0	-3
1	-1
-1	-5
-2	-7
2	1
3	3
-3	-9
4	5
-4	-11

Representem els valors en una gràfica



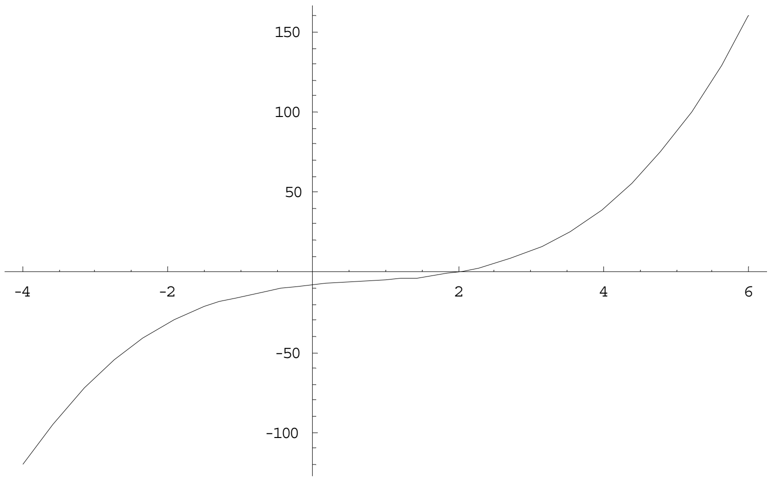
b) Representació gràfica de la funció $y = x^2 - 5x + 6$

X	***Y***
x	$y=x^2-5x+6$
0	6
1	2
-1	10
-2	20
2	0
3	0
-3	30
4	2
-4	40



c) Representació gràfica de la funció $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

X	***Y***
x	$y=x^3-2x^2+4x-8$
0	-8
1	-5
-1	-15
-2	-32
2	0
3	13
-3	-65
4	40
-4	-120



Observem que l'estructura matemàtica de les funcions anteriors és la d'un polinomi on la *x* és la variable independent i les imatges es calculen substituint el valor de *x* en el polinomi. Una taula ens permet determinar algunes imatges que ens ajuden a fer la representació gràfica de la funció.

Les funcions més senzilles són aquelles que es representen per un polinomi.

Podem definir funcions amb expressions matemàtiques com combinació de polinomis.

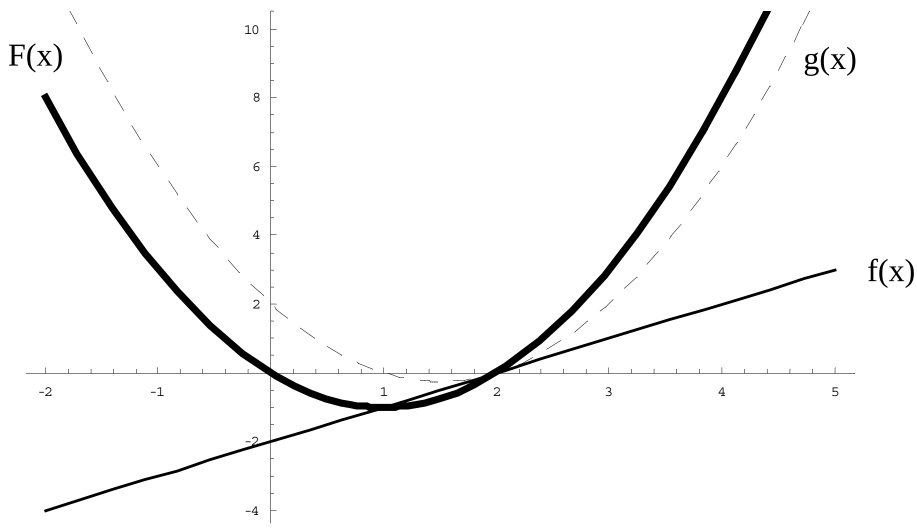
El resultat de sumar , restar , multiplicar o dividir polinomis dóna una altra funció.

Exemples:

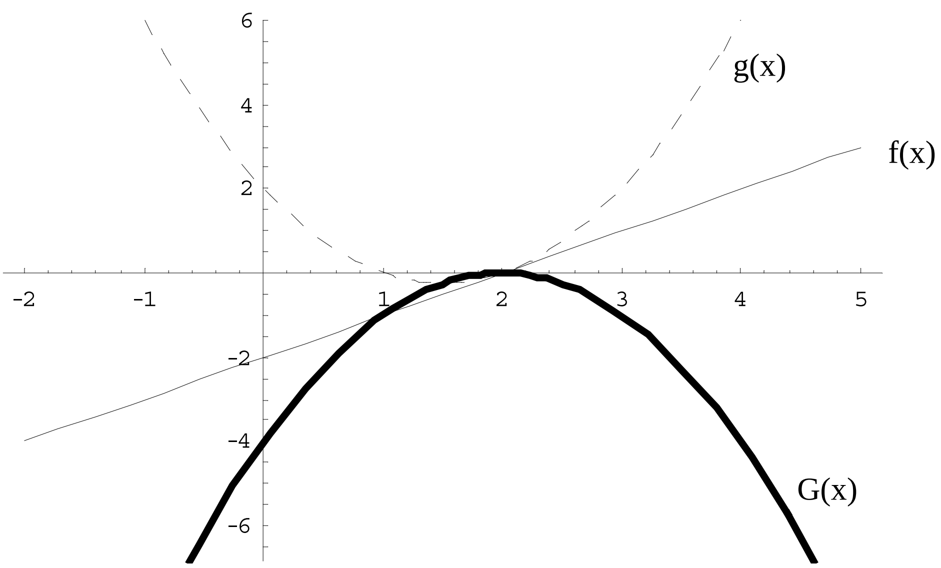
Sigui : $f(x) = x - 2$ $\quad i \quad$ $g(x) = x^2 - 3x + 2$

La suma de les dues és una altra funció:

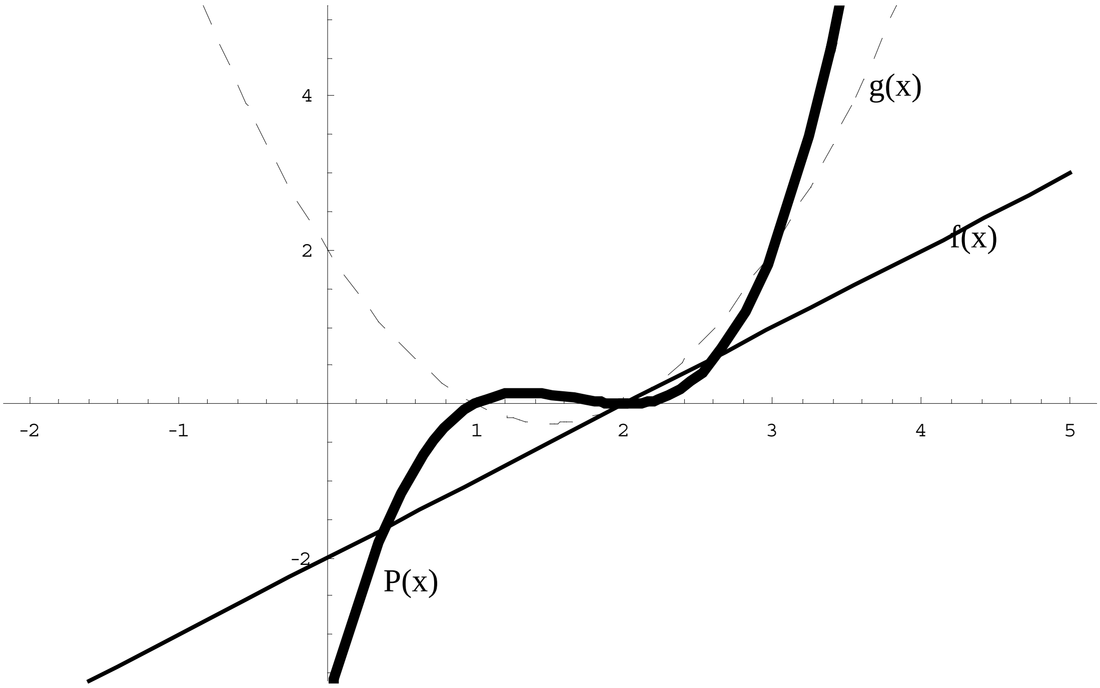
$$F(x) = (x-2) + \left(x^2 - 3x + 2\right) = x^2 - 2x$$



La resta és una altra funció: $G(x) = (x-2) - \left(x^2 - 3x + 2\right) = -x^2 + 4x - 4$

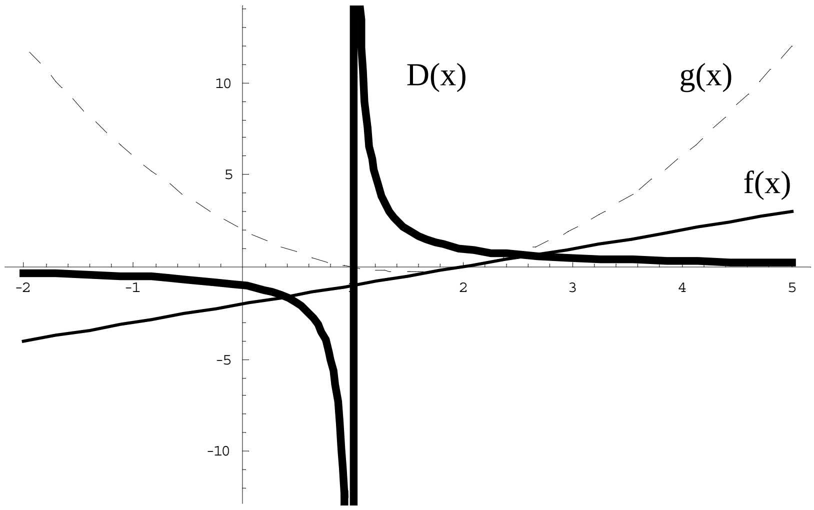


El producte : $P(x) = (x-2)\cdot\left(x^2 - 3x + 2\right) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$



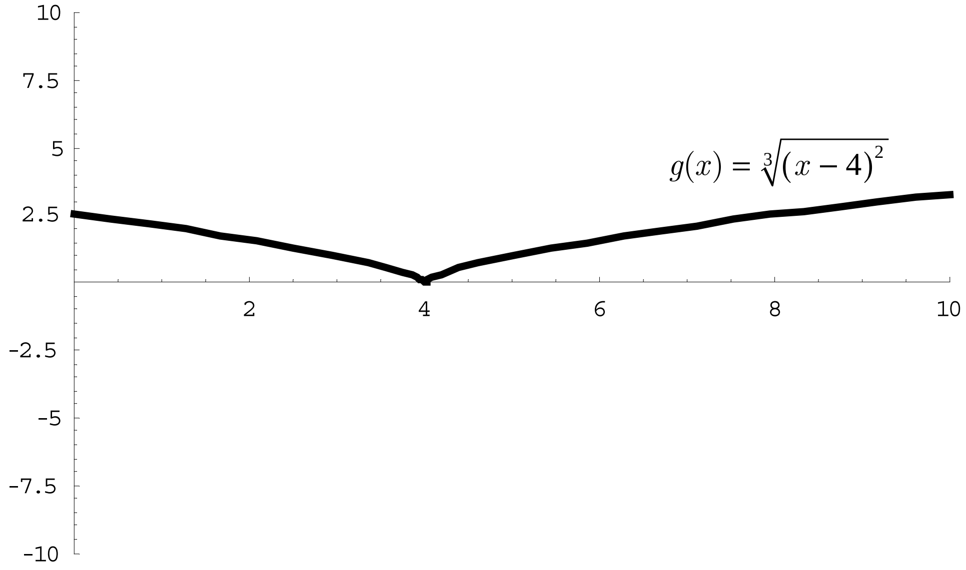
La divisió de funcions polinòmiques ja no dona un polinomi, però si és una funció:

$$D(x) = \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$$



Podem elevar una funció amb exponents racionals:

Per exemple : $f(x) = x - 4 \quad ; \quad g(x) = [f(x)]^{\frac{2}{3}} = (x-4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-4)^2}$



En general una funció f rep el nom de ***funció algebraica*** si es pot expressar en termes de sumes, diferències , productes , quocients o arrels de polinomis.

Composició de funcions

Podem obtenir una funció a partir d'altres funcions mitjançant la composició de funcions.

Siguin:

$$f : X \to Y \quad i \quad g : Y \to Z$$

A partir de les funcions *f* i *g* podem definir una nova funció : $h : X \to Z$ de la següent manera:

$$h(x) = g[f(x)] = (g \circ f)(x) \in Z$$
$$x \in X \quad ; \quad y = f(x) \in Y \quad ; \quad z = g(y) = g(f(x)) \in Z$$

Exemple :

Siguin les funcions: $f(x)=5x+3$ *i* $g(x)=x^2+2$

Llavors:

$$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g\left[5x+3\right]=(5x+3)^2+2=25x^2+30x+11$$

$$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\left[x^2+2\right]=5\left(x^2+2\right)+3=5x^2+13$$

Quan determinen la funció composta, hem de pensar en el seu domini. En aquest cas com les dues funcions són polinòmiques, amb domini per tots els nombres reals, el domini de la funció composta també és el conjunt del nombres reals.

Exemple:

Siguin les funcions: $f(x)=\sqrt{x-3}$ *i* $g(x)=3x+2$

Llavors:

$$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g\left[\sqrt{x-3}\right]=3\sqrt{x-3}+2$$

$$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\left[3x+2\right]=\sqrt{(3x+2)-3}=\sqrt{3x-1}$$

Per determinar el domini de la funció composta primer haurem de determinar el domini de les funcions originals:

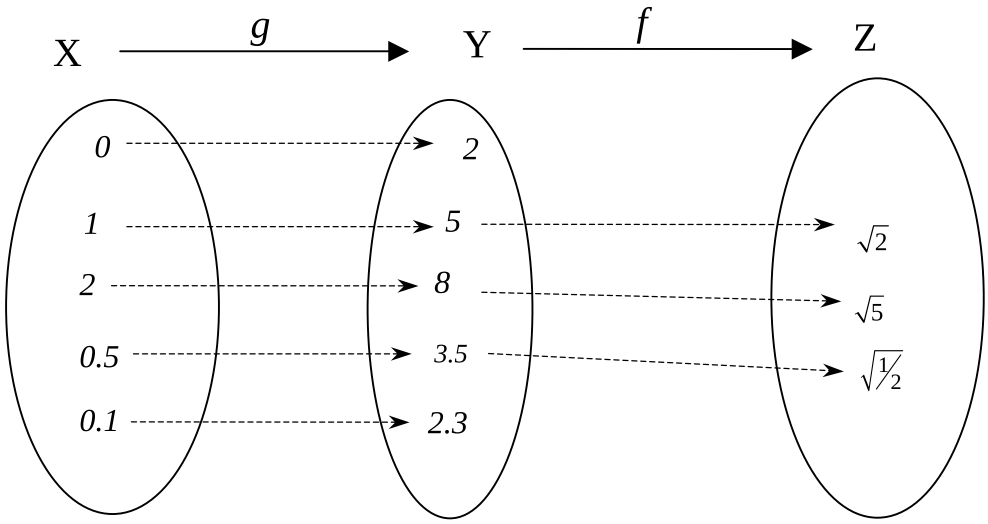
Per $f(x)=\sqrt{x-3}$ $\quad Dom\ f(x)=\left\{x\in\mathbb{R}\ \ |\ x\geq 3\right\}$

El domini de g(x) són tots els nombres reals. $Dom\ g(x)=\mathbb{R}$

Determinem el $Dom(g\circ f)$, *observem que per qualsevol* $x\geq 3$ *es poden calcular les imatges, ja que la funció g no té restriccions. Per tant el domini és el mateix que el de la funció f.*

Determinem el $Dom(f\circ g)$, *inicialment apliquem la funció g que no té restriccions, a l'hora d'aplicar la funció f (que no es pot fer pels elements que són inferiors a 3) , hem de tenir en compte que aquests elements han estat la conseqüència de multiplicar per 3 i sumar 2 unitats als nombres del conjunt original, per tant obtenint una funció de la forma* $\sqrt{3x-1}$ *, és a dir que tots els nombres reals* $x\geq 1/3$ *formen* $Dom(f\circ g)$.

$$Dom(f\circ g)=\left\{x\in\ \ |\ x\geq 1/3\right\}$$



Exemple :

Siguin les funcions: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ i $g(x) = \sqrt{x}$

Llavors:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{x+1}{x-2}\right] = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{x}\right] = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

Per $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R} \quad | x \neq 2\}$

Per $g(x) = \sqrt{x}$, $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R} \quad | x \geq 0\}$

Determinem el $Dom(g \circ f)$

Seran tots el nombres reals diferents de 2 que facin que sigui un real positiu el valor de l'expressió de dins de l'arrel.

$$Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \quad | x > 2 \ \ i \ \ x < -1\}$$

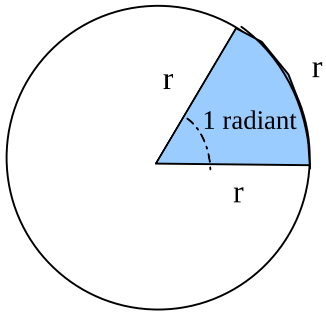
Determinem el $Dom(f \circ g)$

Seran tots el nombres reals positius diferents de 4 .

$$Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \quad | x \geq 0 , x \neq 4\}$$

Trigonometria

Abans de començar definirem la unitat natural de mesura d'angles : ***el radiant.***



L'angle que abasta un arc de longitud igual a la del radi és un radiant (1 rad).

D'aquesta manera la longitud *L* d'un arc de circumferència de radi *r* i d'amplitud α radiants , s'expressa per:

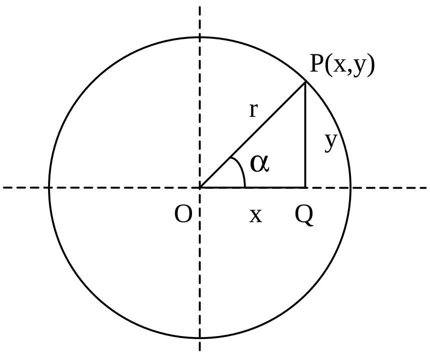
$$L = r \cdot \alpha$$

Com sabem que una circumferència completa té una longitud de $2\pi \cdot r$, comparant amb l'expressió anterior, deduïm que una circumferència completa abasta un angle de 2π radiants. Així podem comparar els radiants amb la unitat de mesura d'angles coneguda dels graus sexagesimals:

$$360^o = 2\pi\, rad$$

Raons trigonomètriques d'un angle

Situem uns eixos de coordenades cartesianes amb origen en el centre d'una circumferència de radi r.



Considerant el triangle OPQ i l'angle α , ***les raons trigonomètriques*** de l'angle són:

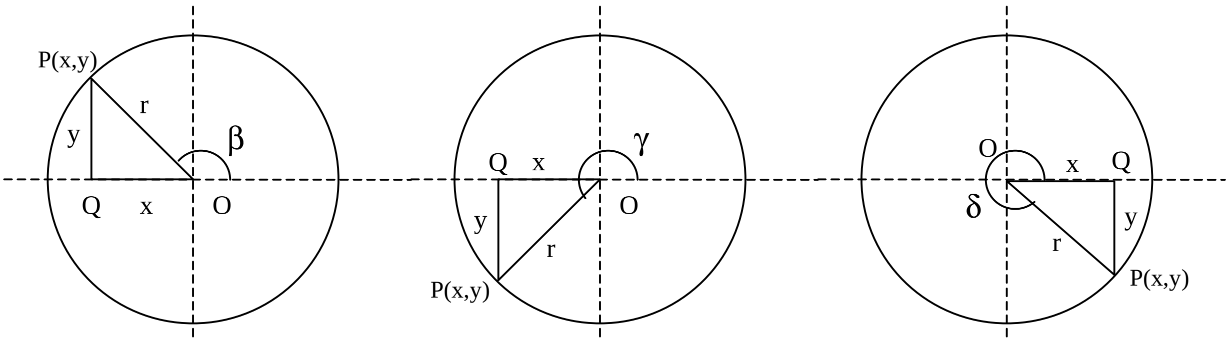
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Podem considerar el punt P en qualsevol posició de la circumferència, llavors les coordenades (x, y) podran canviar de signe:

Per exemple :



$\beta \in II\ quadrant \rightarrow \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ $\gamma \in III\ quadrant \rightarrow \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ $\delta \in IV\ quadrant \rightarrow \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

Observem que en el segon el quadrant *x* és negativa i *y* positiva , en el tercer quadrant les dues coordenades són negatives i que en el quart quadrant la *x* és positiva i la *y* negativa.

Per tant les raons trigonomètriques són positives o negatives en funció del quadrant a que correspongui l'angle.

Les raons trigonomètriques no depenen del radi de la circumferència, ja que al variar el radi els triangles amb el mateix angle són semblants, les magnituds de *x* , *y*, i *r* varien proporcionalment.

Podem observar que podem relacionar la tangent amb el sinus i el cosinus :

$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y \cdot \frac{1}{r}}{x \cdot \frac{1}{r}} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

El sinus i el cosinus estan relacionats per:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

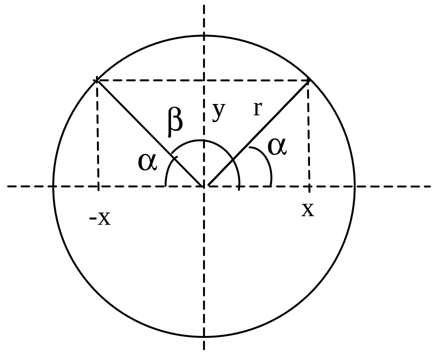
Reducció al primer quadrant

Les raons trigonomètriques de qualsevol angle es relacionen amb les d'un altre del primer quadrant.

Com la tangent la deduïm de les altres dues raons trigonomètriques, donarem únicament les fórmules de reducció al primer quadrant del sinus i el cosinus.

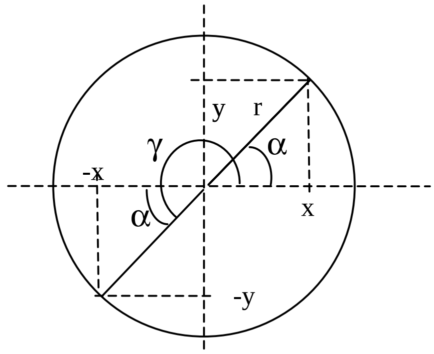
Si β és del segon quadrant, existeix un angle del primer quadrant $\alpha = \pi - \beta = 180^{\circ} - \beta$ tal que:

$$\sin\beta = \sin\alpha = \sin(\pi - \beta)$$
$$\cos\beta = -\cos\alpha = -\cos(\pi - \beta)$$



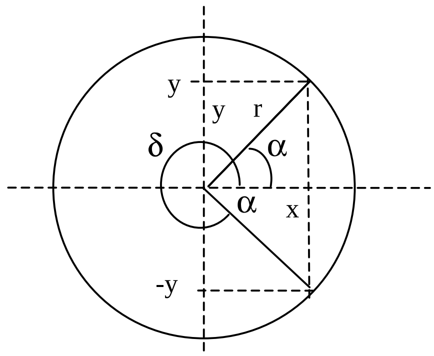
Si γ és del tercer quadrant, existeix un angle del primer quadrant ,α , tal que $\gamma = \pi + \alpha = 180^{\circ} + \alpha$ complint-se que:

$$\sin\gamma = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos\gamma = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$



Si δ és del quart quadrant, existeix un angle del primer quadrant , α , tal que $\delta = 2\pi - \alpha = 360^{\circ} - \alpha$ complint-se que:

$$\sin\delta = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos\delta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$



Fòrmules trigonomètriques

Sense justificar-les donarem un conjunt de relacions útils entre les raons trigonomètriques.

Fórmules d'addició

Desenvolupament de les raons trigonomètriques per la suma de dos angles:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Desenvolupament de les raons trigonomètriques per la resta de dos angles:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Desenvolupament de les raons trigonomètriques del doble d'un angle:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Desenvolupament de les raons trigonomètriques de l'angle meitat:

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Transformació de sumes en productes

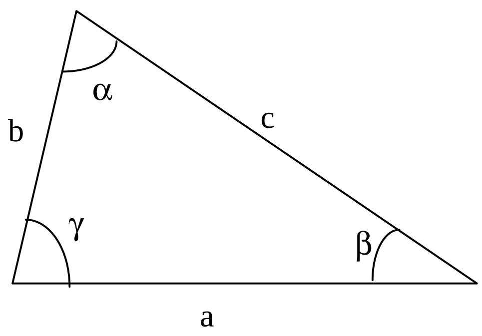
En determinades ocasions cal expressar sumes i diferències de raons trigonomètriques en forma de productes:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Teoremes del sinus i del cosinus

Determinen relacions entre els angles i la longitud dels costats en un triangle.

Sigui el triangle de la figura:



Teorema del sinus:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Teorema del cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}\cos\gamma$$

Les funcions trigonomètriques

La funció sinus

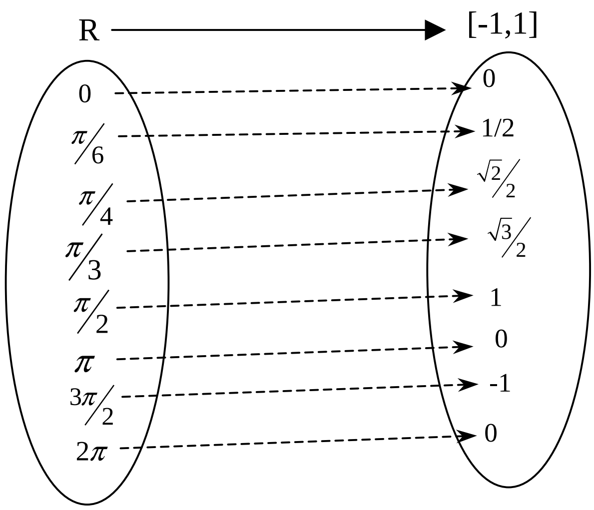
És una funció que relaciona un angle amb el seu sinus.

Sigui x un nombre real qualsevol que representa en radiants un angle.

> *Fonamentalment ens interessa els valors de x entre 0 i 2π rad, ja que per angles més grans si restem els múltiples de 2π més propers per defecte obtindrem un angle entre 0 i 2π.*
>
> *Exemple:* $\sin {}^{7\pi}/_{2} = \sin\left({}^{7\pi}/_{2} - 2\pi\right) = \sin {}^{3\pi}/_{2}$

A cada valor de x li fem correspondre el resultat de calcular el seu sinus. $f(x) = \sin x$

x(rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$2\pi/3$	$3\pi/2$	2π
Sin x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	0



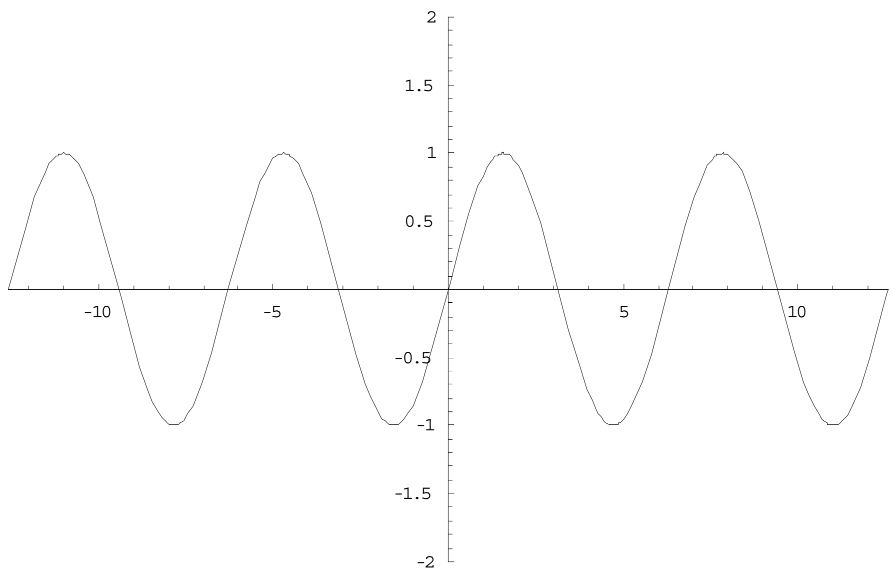
Observem que el domini de la funció sinus són tots el nombres reals, però el seu recorregut únicament és l'interval tancat entre -1 i 1 .

$$\text{Recorregut } Sin(x) = \{x \in \mathbb{R} \quad | -1 \leq x \leq 1\}$$

Observant la representació gràfica de la funció sinus deduïm que és una funció periòdica, amb període 2π rad, està acotada entre –1 i 1 i la corba que la representa és molt característica i es coneix com sinusoide.

Observem també que la funció sinus és una funció senar:

$$\sin(-x) = -\sin x$$



La funció cosinus

És una funció que relaciona un angle amb el seu cosinus.

Sigui x un nombre real qualsevol que representa en radiants un angle.

Fonamentalment ens interessa els valors de x entre 0 i 2π rad, ja que per angles més grans si restem els múltiples de 2π més propers per defecte obtindrem un angle entre 0 i 2π.

Exemple: $\cos 11\pi/3 = \cos\left(11\pi/3 - 2\pi\right) = \cos 5\pi/3$

A cada valor de x li fem correspondre el resultat de calcular el seu cosinus.

$$f(x) = \cos x$$

x(rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$2\pi/3$	$3\pi/2$	2π
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	1

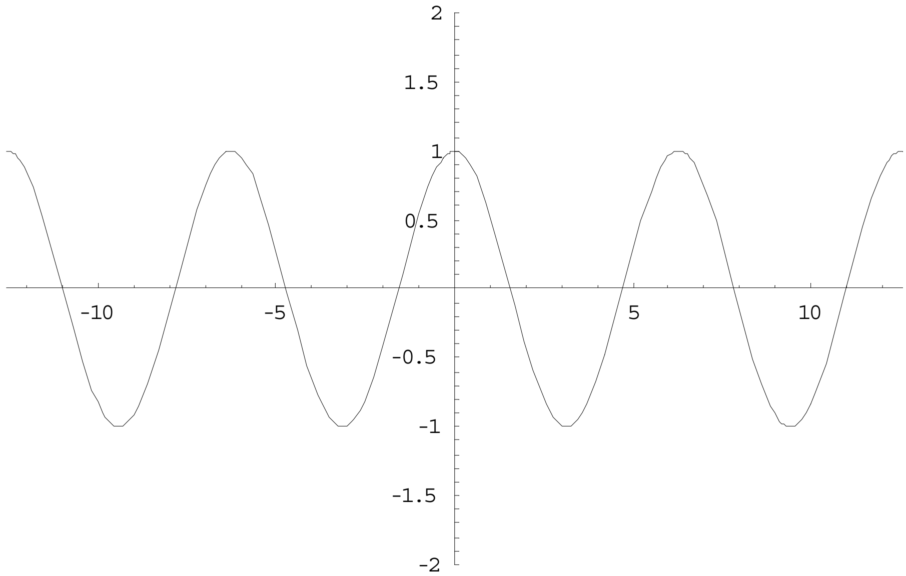
Observem que el domini de la funció cosinus són tots el nombres reals, però el seu recorregut únicament és l'interval tancat entre -1 i 1 .

$$\text{Recorregut } \cos(x) = \{x \in \mathbb{R} \quad | -1 \le x \le 1\}$$

Observant la representació gràfica de la funció cosinus deduïm que és una funció periòdica, amb període 2π rad, està acotada entre –1 i 1 . La corba representativa de la funció cosinus és igual a la de la funció sinus però desplaçada π/2 cap a l'esquerra.

Això dóna lloc a que la funció *cos x* sigui una funció parell, ja que és simètrica respecte l'eix d'ordenades:

$$\cos(-x) = \cos x$$



La funció tangent

És una funció que relaciona un angle amb la seva tangent trigonomètrica.

Sigui *x* un nombre real qualsevol que representa en radiants un angle.

Fonamentalment ens interessa els valors de x entre 0 i 2π rad, ja que per angles més grans si restem els múltiples de 2π més propers per defecte obtindrem un angle entre 0 i 2π.

Exemple: $\tan 9\pi/2 = \tan\left(9\pi/2 - 2\cdot 2\pi\right) = \tan \pi/2$

A cada valor de *x* li fem correspondre el resultat de calcular la seva tangent trigonomètrica.

$$f(x) = \tan x$$

x(rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$2\pi/3$	$3\pi/2$	2π
tg x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0

La funció tangent és pot considerar com el quocient de la funció sinus entre la funció cosinus:

$$\tan\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Podem deduir que el domini de la funció tangent estarà restringit en aquells valors en que la funció cosinus es faci zero. ($\cos \pi\!/_2 = 0 \quad ; \quad \cos 3\pi\!/_2 = 0 \quad ;\cdots$)

En general direm que la funció tangent no està definida per angles que siguin múltiples senars de $\pi/2$.

$$Dom \tan x = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad , k \in \mathbb{Z} \right\}$$

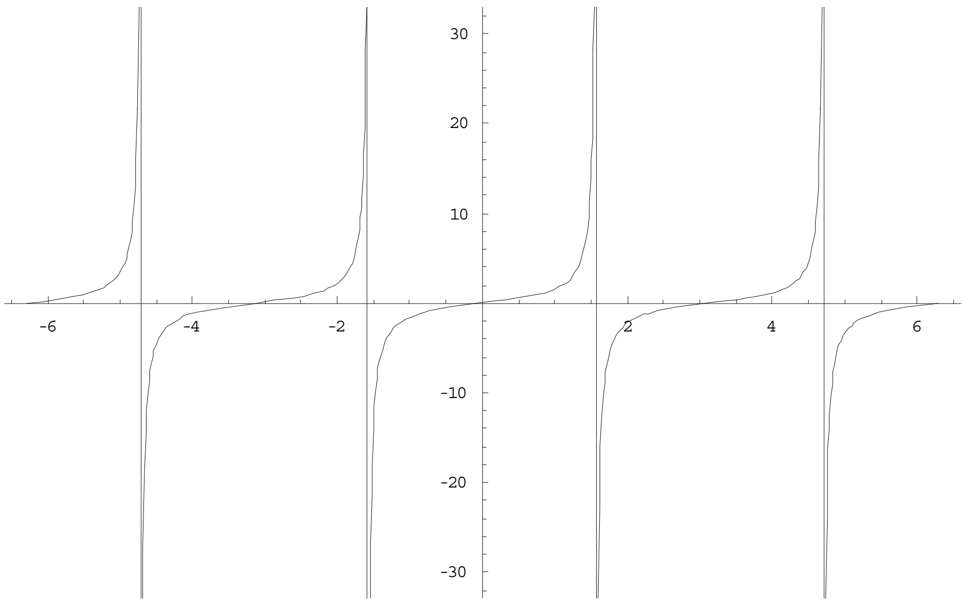
El recorregut de la funció tangent són tots els nombres reals

$$\textit{Recorregut} \quad \tan(x) = \mathbb{R}$$

Observant la representació gràfica de la funció tangent deduïm que és una funció periòdica, amb període 2π rad .

La funció *tg x* és una funció senar:

$$\tan(-x) = -\tan x$$



Altres funcions trigonomètriques

A partir de les tres raons trigonomètriques d'un angle α , se'n poden definir tres més.

Cosecant

Per qualsevol angle en que $\sin\alpha \neq 0$ podem calcular $\dfrac{1}{\sin\alpha}$, aquest valor l'anomenem cosecant de l'angle α:

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Secant

Per qualsevol angle en que $\cos\alpha \neq 0$ podem calcular $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, aquest valor l'anomenem secant de l'angle α:

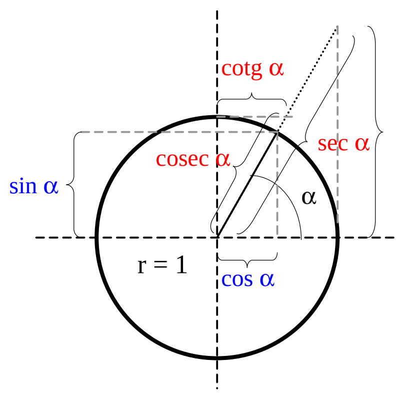
$$sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Cotangent

Per qualsevol angle en que $\sin\alpha \neq 0$ podem calcular $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$, aquest valor l'anomenem cotangent de l'angle α:

$$cotan\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

En una circumferència de radi unitat en podem representar les 6 raons trigonomètriques.



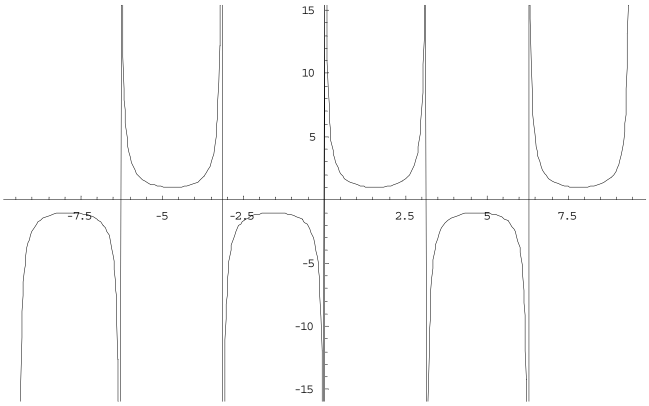
Ara podem definir noves funcions reals corresponents a aquestes raons trigonomètriques:

funció cosecant

A cada angle x li correspon $cosec\ x$.

Aquesta funció no està definida per als valors de x tal que $sin\ x=0$, és a dir:

$$Dom\ cosec\ x=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

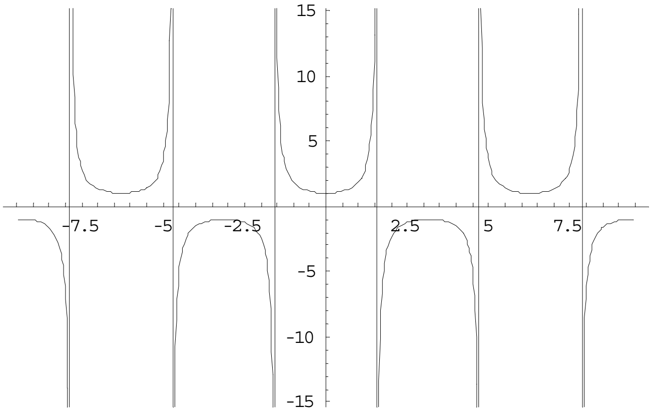


funció secant

A cada angle x li correspon $sec\ x$.

Aquesta funció no està definida per als valors de x tal que $cos\ x=0$, és a dir:

$$Dom\ sec\ x=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

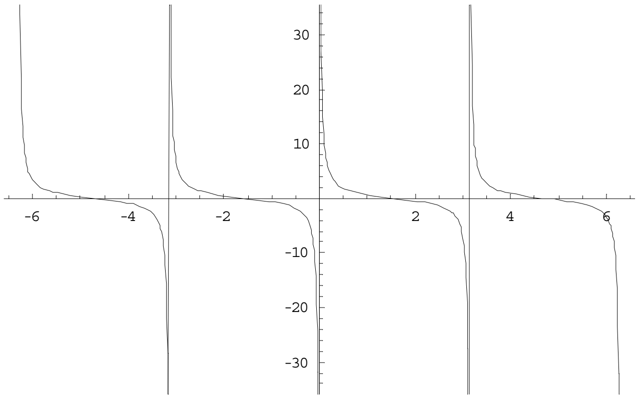


funció cotangent

A cada angle *x* li correspon $\cot x$.

Aquesta funció no està definida per als valors de x tal que *sin x=0* , és a dir:

$$Dom\ cotan\ x = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$



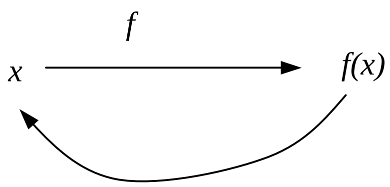
Funcions inverses de les funcions trigonomètriques

Les funcions reals de variable real admeten en molts casos la funció inversa $f^{-1}(x)$.

La funció inversa és una funció que compleix:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = I(x)$$

on *I(x)* és la funció identitat.



Exemples:

a) $f(x) = 2x$

$f^{-1}(x) = x/2 \qquad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}\left[2x\right] = \frac{2x}{2} = x = I(x)$

b) $f(x) = x^2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}\left[x^2\right] = \sqrt{x^2} = x = I(x)$

Una funció inversa el que fa és canviar els papers de les variables dependent i independent. Per tant el recorregut passa a ser el domini i el domini el recorregut.

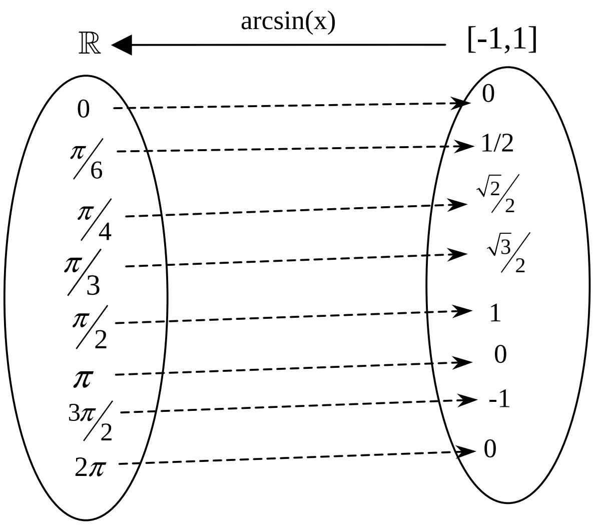
Les funcions trigonomètriques admeten funció inversa .

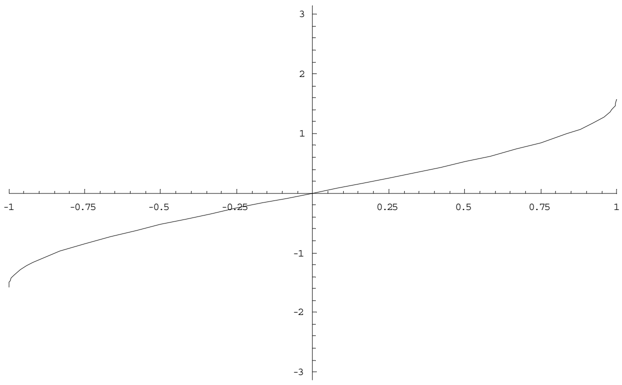
Si el que volem és saber quin o quins angles tenen per sinus un determinat valor, el que estem cercant el la funció inversa de la funció sinus. Al mateix per les altres funcions trigonomètriques.

La funció arc sinus

És la funció inversa de la funció sin (x). Rep el nom de funció arcsin (x)

$$f(x) = \arcsin(x)$$





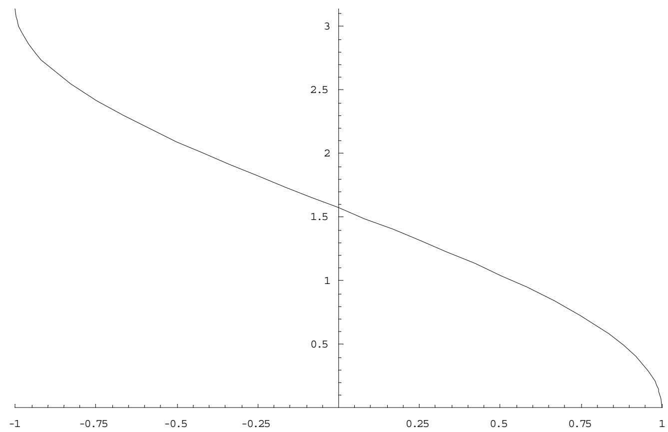
x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
arcsin x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

El domini de la funció és l'interval [-1,1] i el recorregut [-π/2,π/2]

La funció arc cosinus

És la funció inversa de la funció cos (x). Rep el nom de funció arccos (x)

$$f(x) = \arccos(x)$$



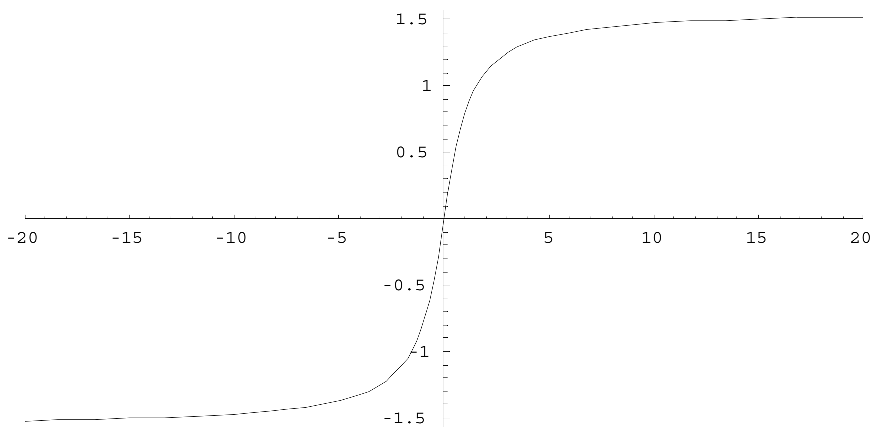
x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
arccos x (rad)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$3\pi/4$	π

El domini de la funció és l'interval [-1,1] i el recorregut [0 , π]

La funció arc tangent

És la funció inversa de la funció tg (x). Rep el nom de funció arctg (x)

$$f(x) = \arctan(x)$$



x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$
arctg(x)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$

El domini de la funció és l'interval $[-\infty,\infty]$ i el recorregut [-π/2,π/2] .

La funció exponencial

Potències amb exponents reals

Donat un nombre real positiu , $a \in \mathbb{R}$, i un nombre natural , $n \in \mathbb{N}$, definim:

$$a^n = a \cdot a \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot a$$

i es compleixen les següents propietats:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$
$$\left[a^n\right]^m = a^{n \cdot m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Exemples:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$
$$\underbrace{3^2 \cdot 3^3} = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 9 \cdot 27 = 243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underbrace{3^5}$$

$$\underbrace{\left(2^2\right)^4} = (2 \cdot 2)^4 = 4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underbrace{2^8}$$

$$5^3 = 125 \quad \rightarrow \quad 5 = \sqrt[3]{125}$$

Podem ampliar la definició anterior per n un nombre enter.

Llavors:

Per $n = 0$ $\quad a^0 = 1$

Per exponents negatius: $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Per exponents racionals: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemples :

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$
$$25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

La funció exponencial

Definim la funció $f(x)=a^x$ per $a\in \mathbb{R}^+$ i $x\in \mathbb{R}$, que anomenarem funció exponencial de base a. La funció exponencial s'expressa mitjançant una potència de base una constant positiva en què l'exponent, x, és la variable independent.

Com que la variable x pot prendre qualsevol valor real, tindrem que el domini de la funció exponencial de base a és el conjunt de tots els nombres reals.

$$f(x)=a^x \quad \rightarrow \quad Dom f(x)=\mathbb{R}$$

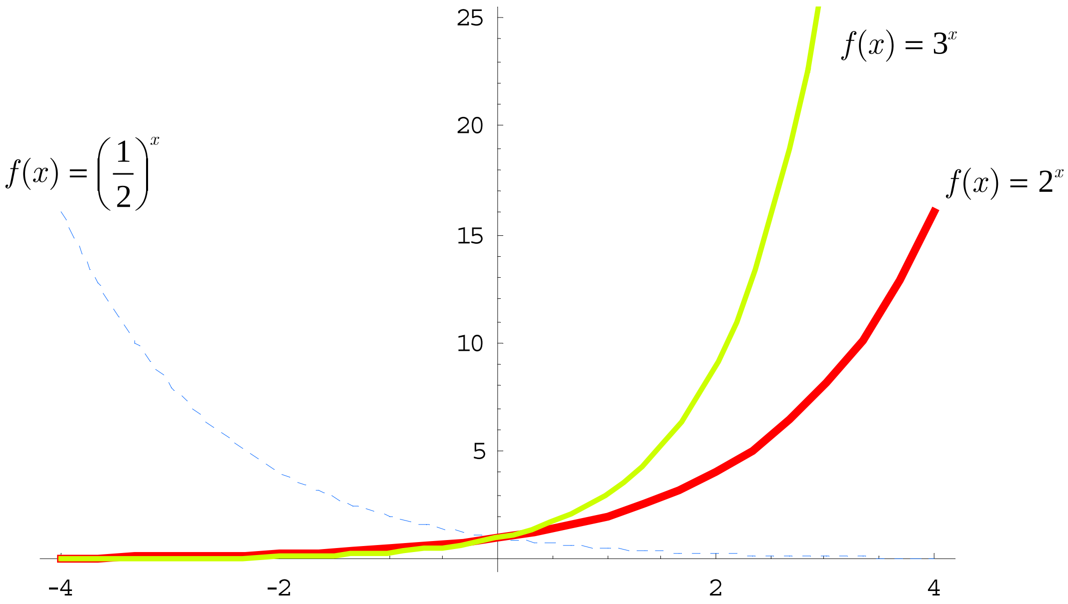
Exemples:

$$f(x)=2^x$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$h(x)=3^x$$

Les seves representacions gràfiques tenen la forma següent:



Observem:

- *El recorregut del la funció exponencial són tots els nombres reals positius.*
  Recorregut $f(x)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}=\mathbb{R}^+$

- *Que la funció exponencial no talla a l'eix d'abcisses.*

- *Que les gràfiques de les funcions exponencials*

$$f(x)=a^x \quad i \qquad g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

són simètriques respecte l'eix d'ordenades

Hem de recordar que la base de la funció exponencial sempre és un real positiu.

Resulta que :

$$\text{si } a>1 \rightarrow \begin{cases} a^x>1 \;\; si \; x>0 \\ 0<a^x<1 \;\; si \; x<0 \\ a^x=1 \;\; si \; x=0 \end{cases}$$

$$\text{si } 0<a<1 \rightarrow \begin{cases} 0<a^x<1 \;\; si \; x>0 \\ a^x>1 \;\; si \; x<0 \\ a^x=1 \;\; si \; x=0 \end{cases}$$

La funció exponencial de base 10 és la base de la nostra numeració. *f(x)=10^x^* $f(x)=10^x$

Exemple:

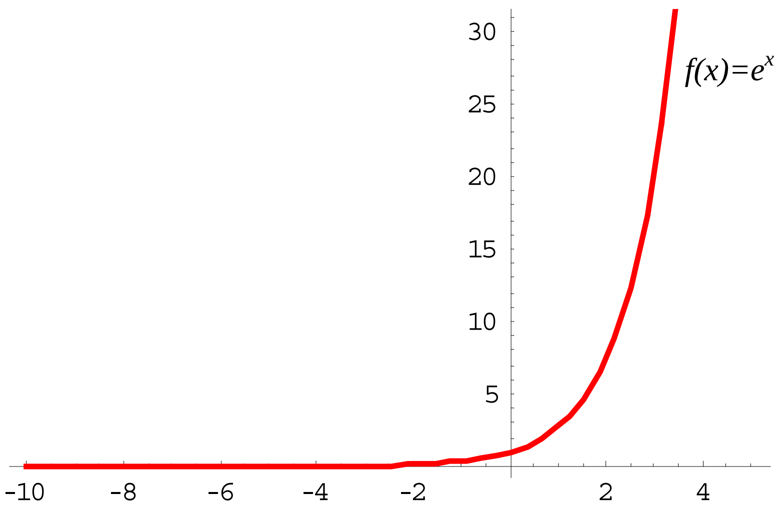
$$435.82=4{\cdot}10^2+3{\cdot}10^1+5{\cdot}10^0+8{\cdot}10^{-1}+2{\cdot}10^{-2}$$

La funció exponencial de base 2 és la base del sistema binari. $f(x)=2^x$

Exemple:

$$101110.101=1{\cdot}2^5+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^{-1}+1{\cdot}2^{-3}$$

Una de les funcions exponencials més utilitzades en matemàtiques i en el món de la ciència i de la tècnica és la funció exponencial de base el nombre e. Quan parlem de funció exponencial sense anomenar la base, ens referim a la funció: $f(x)=e^x$



La funció logarítmica

La funció inversa de la funció exponencial, és a dir , trobar un exponent al que elevar una base per trobar el valor desitjat, s'anomena funció logarítmica.

$$y = a^x \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$$

Exemples:

$$100 = 10^2 \quad \rightarrow \quad 2 = \log_{10} 100$$

$$32 = 2^5 \quad \rightarrow \quad 5 = \log_2 32$$

$$81 = 3^4 \quad \rightarrow \quad 4 = \log_3 81$$

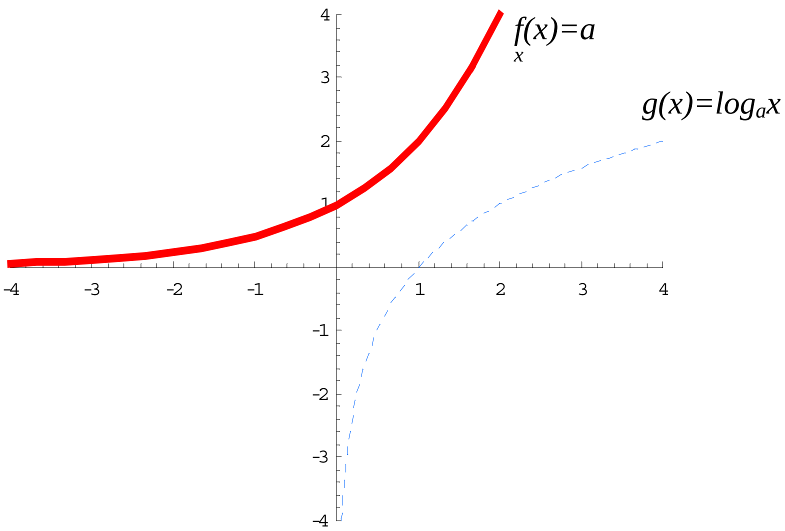
$$8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \rightarrow \quad -3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2} \quad \rightarrow \quad -2 = \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)$$

Per definició les funcions $f(x) = a^x$ i $g(x) = \log_a x$ són funcions inverses, tal com ho eren ,per exemple, el sin(x) i arcsin(x).

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

Per tant en les representacions gràfiques de les dues $f(x) = a^x$ i $g(x) = \log_a x$ es tracta de canviar el paper dels eixos de coordenades.



Ja que les funcions exponencial i logarítmica són funcions inversa una de l'altra, la composició de les dues donarà la funció identitat : *I(x)=x* .

$$f(x) = a^x \quad ; \quad g(x) = \log_a x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[a^x] = \log_a a^x = x \\ (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\log_a x] = a^{\log_a x} = x \end{cases}$$

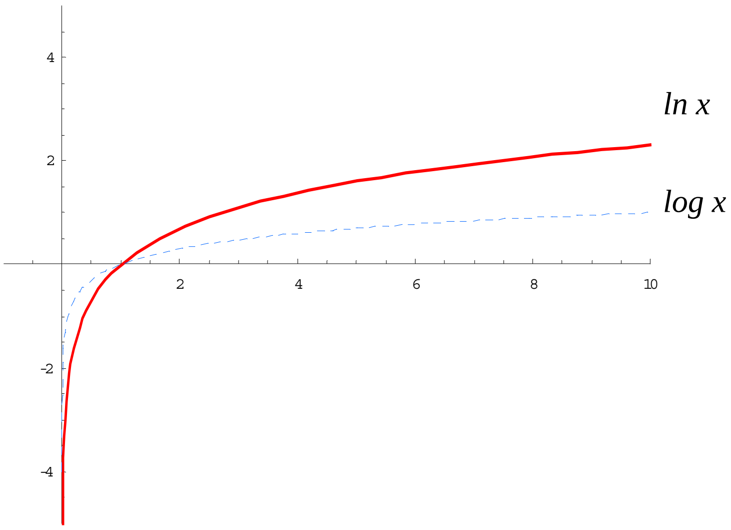
Per tant, per definició, es compleixen les identitats:

$$\log_a a^x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Les funcions logarítmiques més utilitzades són les de base decimal i la que té per base el nombre *e*.

La funció logarítmica de base 10. s'escriu normalment *log x* i es llegeix logaritme decimal de *x*.

Els logaritmes de base el nombre *e* s'escriuen normalment *ln x* i es llegeixen logaritme natural o logaritme neperià de *x*.



Propietats dels logaritmes

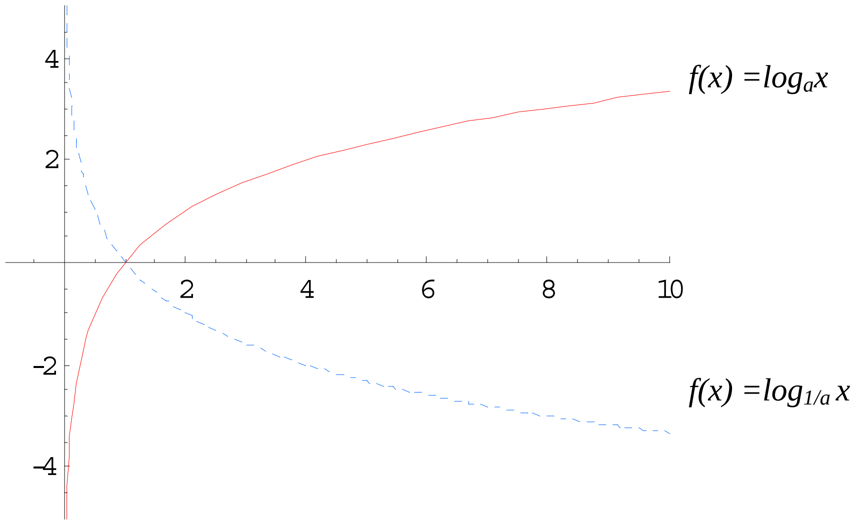
- El domini de la funció logaritme són els reals positius:

$$Dom(\log_a x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

- El recorregut de la funció logarítmica són tots el nombres reals:

$$Recorregut(\log_a x) = \mathbb{R}$$

- Les gràfiques de les funcions logarítmiques $f(x)= log_a x$ i $g(x) = log_{1/a} x$ són simètriques respecte de l'eix d'abcisses.



- Les gràfiques de les funcions logarítmiques passen totes pel punt (1,0)

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad | \, a \neq 1 \qquad log_a 1 = 0 \qquad \text{i} \qquad log_a a = 1$$

- El logaritme d'un producte és la suma dels logaritmes dels factors.

$$\log_a (x \cdot z) = \log_a x + \log_a z$$

- El logaritme d'una potència és el producte de l'exponent pel logaritme de la base.

$$\log_a (x^p) = p \cdot \log_a x$$

- El logaritme d'un arrel és el logaritme del radicant dividit per l'índex de l'arrel.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

- El logaritme d'un quocient és el logaritme del dividend menys el logaritme del divisor.

$$\log_a \left(\frac{x}{z}\right) = \log_a x - \log_a z$$

Amb aquestes propietats observem que els logaritmes transformen operacions complexes en operacions mes senzilles. Es per aquesta raó que l'ús dels logaritmes ha estat tant útil en la història del càlcul matemàtic.

Exemple:

Suposem que hem de fer la següent operació:

$$m = \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b \cdot c^{-1}}}{d^5}$$

Si apliquem logaritmes decimals:

$$\log m = \log \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b \cdot c^{-1}}}{d^5} = \log \sqrt[3]{a^2 \cdot b \cdot c^{-1}} - \log d^5 = \frac{1}{3} \cdot \log\left(a^2 \cdot b \cdot c^{-1}\right) - 5 \cdot \log d =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left[\log\left(a^2\right) + \log b + \log\left(c^{-1}\right)\right] - 5 \cdot \log d = \frac{1}{3} \cdot [2 \log a + \log b - \log c] - 5 \cdot \log d$$

l'operació es resumeix en sumes , restes i multiplicacions i divisions per nombres senzills.

¡ Imaginem que no tinguéssim calculadora !