TEMA 3.- LÍMITS I DERIVADES

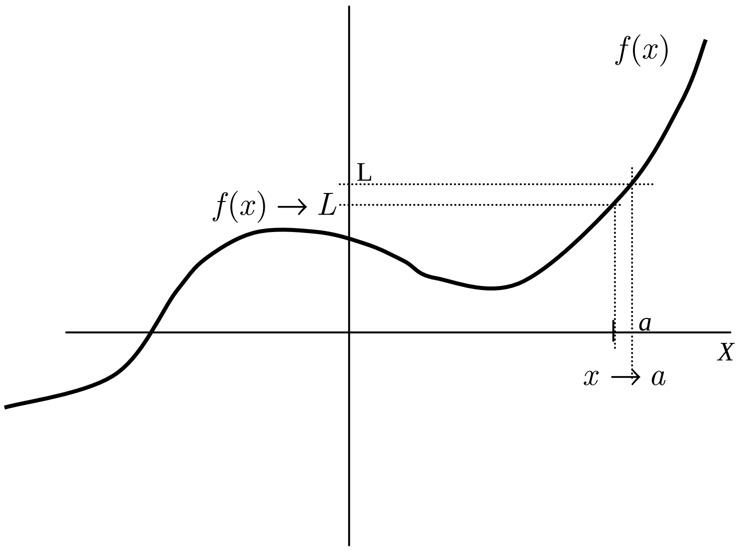
LÍMIT D'UNA FUNCIÓ

En el càlcul i les seves aplicacions sovint ens interessa pels valors *f(x)* d'una funció f quan *x* està molt a prop d'un nombre *a*, però no és necessàriament igual a *a*.

De fet en molts cas la funció no està definida per *a*.

La pregunta que ens podem fer és:

> Si *x* s'apropa més i més a *a* (però $x \neq a$) , *f(x)* s'apropa cada vegada més a un nombre *L* ?



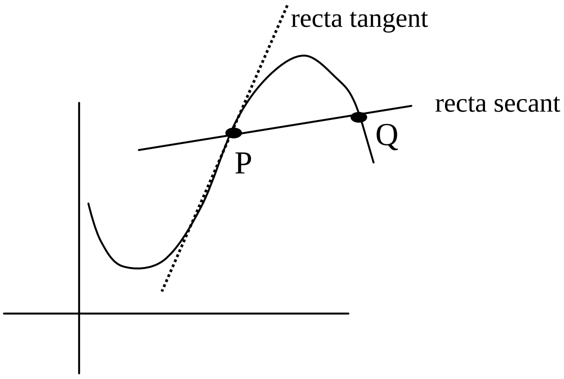
Exemple1

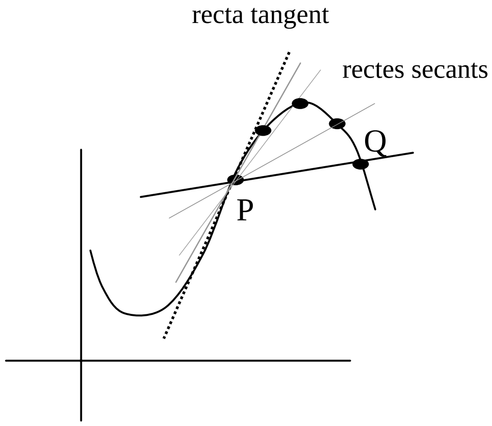
> Un físic desitja mesurar una quantitat quan la pressió de l'aire és zero. Al ser impossible aconseguir un buit perfecte al laboratori, una forma natural d'abordar el problema es mesurar la quantitat a pressions cada vegada més petites. Si quan anem disminuint la pressió , la quantitat s'acosta a un determinat valor, L , podem assegurar que a pressió nul·la el valor de la magnitud buscada és L.

EXEMPLE2

> Per definir la recta tangent en un punt P del gràfic d'una funció , es suficient donar el pendent *a* de la recta. Per determinar a, escollim qualsevol altre punt Q sobre el gràfic i considerem la recta que passa per P i Q. Aquesta recta s'anomena recta secant. Si anem apropant Q a P els pendents de les successives rectes secants tendiran al valor del pendent de la recta tangent. Quan Q tendeix a P els successius pendents de les rectes secant tendeixen al pendent de la recta tangent.

$$\lim_{P \to Q} a_i = a$$





Exemple 3

Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$, volem saber el seu límit quan $x \to 4$

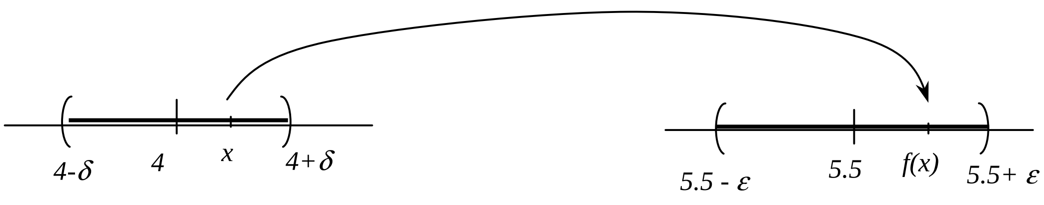
Sabem que per:

x	f(x)		x	f(x)
3.9	5.35		4.1	5.65
3.99	5.485		4.01	5.515
3.999	5.4985		4.001	5.5015
3.9999	5.49985		4.0001	5.50015
3.99999	5.499985		4.00001	5.500015

Observem que en un interval de la variable x entre 3.9 i 4.01 el valor de la funció oscil·la entre 4.01 i 5.65.

Si anem disminuint l'interval de la variable x , va disminuint l'interval del valor de la funció.

Veiem que el límit , valor al que tendeix la funció quan la variable x tendeix a 4 , és 5.5.



$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{2}(3x-1)=\frac{1}{2}(3{\cdot}4-1)=\frac{1}{2}(11)=5.5$$

Podem donar la següent definició de límit.

Considerem un interval obert que conté al valor a . Sigui f una funció definida per tots el nombres de l'interval excepte possiblement a i sigui L un nombre real.

L'afirmació $\lim_{x\to a} f(x)=L$ significa :

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0 \quad tal\ que \quad Si \quad 0<|x-a|<\delta \quad llavors \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

VELOCITAT MITJANA

Una de les raons principals per a la invenció del càlcul va ser la necessitat de trobar una manera d'estudiar el comportament dels objectes en moviment

Considerem el problema d'obtenir una definició satisfactòria de la velocitat o rapidesa d'un objecte en un instant donat.

Començarem suposant que l'objecte es mou en línia recta.

Podem definir ***velocitat mitjana*** durant un interval de temps; $v=\dfrac{D}{t}$

on D és la distància entre la posició inicial de l'objecte i la posició després de t unitats de temps.

La velocitat mitjana no ens dona cap informació sobre la velocitat en un instant donat.

Exemple

Suposem que un cotxe surt de la ciutat A a la 1.00 PM i viatja en una carretera recta arribant a una ciutat b , distant 150 km d'A, a les 4.00 PM.

La velocitat mitjana és de $v=\frac{150}{3}=50\ {}^{km}\!/_{h}$.

Això no vol dir que sabem quina és la velocitat que porta el cotxe, per exemple, a les 2.30 h PM . Per saber-ho necessitaríem informació sobre el moviment a prop de les 2.30 h PM .

Suposem que a les 2.30 h PM el cotxe està a 80 km de la ciutat A i a les 2.35 h PM està a 84 km.

A l'haver restringit l'interval la velocitat mitjana en ell ,s'acostarà més a la velocitat que porta el cotxe just a les 2.30 h PM :

$$v = \frac{4}{1/12} = 48\ {km}/{h}$$

Malgrat aquesta aproximació , encara no estem segurs de la velocitat just a l'instant de les 2.30 h PM .

Evidentment obtindríem una millor aproximació al moviment en aquest instant si reduíssim l'interval de temps, per exemple entre les 2.30 h PM i les 2.31 h PM .

Sembla que el millor procediment seria agafar intervals de temps propers a les 2.30h PM cada vegada més petits i estudiar la velocitat mitjana en cadascun d'ells

Observem que això ens condueix al límit.

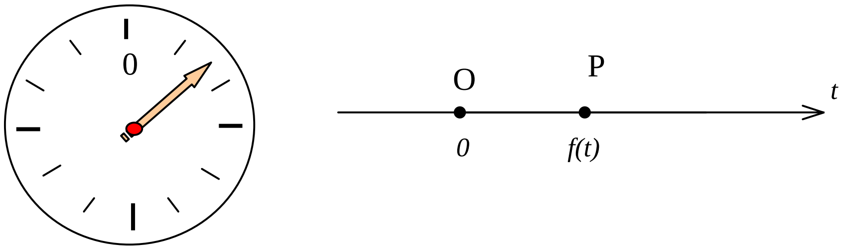
Utilitzem conceptes matemàtics per aconseguir una definició de la velocitat instantània.

Suposem que la posició d'un objecte movent-se en línia recta pot ser representada per un punt P sobre una recta.

Suposem que coneixem la posició de P en tot instant en un interval donat de temps.

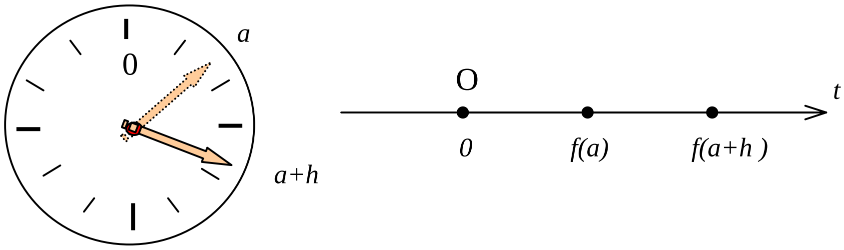
Sigui *f(t)* la funció que ens diu la coordenada del punt P en qualsevol instant. Aquesta funció s'anomena ***funció de posició de P***.

Mesurant el temps amb un rellotge, per cada *t* el punt P està a *f(t)* unitats de l'origen



Per definir la velocitat de P en l'instant *a* , investigarem la velocitat mitjana en un interval de temps proper a (*a + h*), on *h* és un petit interval de temps.

Les posicions corresponents a P vindran donades per *f(a)* i *f(a+h)* .



Observem que en el temps *h* el canvi de posició del punt P és: *f(a+h) - f(a)*

Així la velocitat mitjana de P durant l'interval de temps: *[a , a+h]* serà:

$$\textit{Velocitat mitjana} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quan més petit sigui el valor absolut del temps h , aquests quocient més s'asemblarà a la velocitat de P a l'instant a .

Podem definir la velocitat instantània a l'instant a com el límit quan h tendeix a zero de la velocitat mitjana, sempre que aquest límit existeixi.

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Exemple

La posició d'un punt P sobre una recta ve donada per $f(t) = t^2 - 6t$

(t en s ; f(t) en m) .

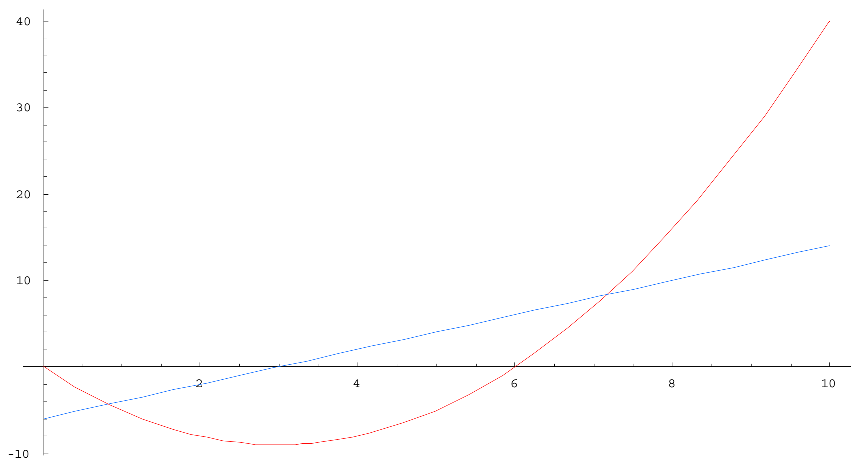
Quan val la velocitat per t = 4 s .

$$f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 = 16 - 24 = -8$$

$$f(4+h) = (4+h)^2 - 6 \cdot (4+h) = 16 + 8h + h^2 - 24 - 6h = -8 + 2h + h^2$$

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{-8 + 2h + h^2 - (-8)}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

$$v(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2 \ ^{m}\!/_{s}$$



DEFINICIÓ DE DERIVADA

El límit deduït per calcular la velocitat instantània del punt P és un dels conceptes fonamentals del càlcul:

Sigui *f* una funció definida en un interval obert que conté un punt *a*. Llavors la ***derivada de f en el punt a***, ***f'(a)*** , ve donada per:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si comparem la definició de derivada d'una funció en un punt amb el concepte anterior de velocitat instantània, deduïm que:

$$v(t) = f'(t)$$

a $v(t)$ l 'anomenarem ***funció velocitat del punt P***.

Direm que la funció velocitat és la derivada de la funció de posició .

CONSIDERACIONS SOBRE LA DERIVADA

Diem que una funció f és derivable en un interval obert *(a, b)* si és derivable en qualsevol punt $c \in (a,b)$

Per intervals tancats direm:

Una funció és derivable en un interval tancat *[a,b]* si és derivable a *(a,b)* i existeixen els límits :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad i \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

Aquests límits se'ls anomena respectivament ***derivada per la dreta de f en el punt a*** i ***derivada per l'esquerra de f en el punt b*** .

Donada una funció *f* i un conjunt *S* que conté els punts *x* on existeix la derivada de *f* , *f'(x)* , a aquesta nova funció l'anomenarem funció derivada .

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemple :

Sigui la funció $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.

Determineu f'(x) .

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - 3x^2 - 5x + 4}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2) - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h - 5) = 6x - 5$$

INCREMENTS I DIFERENCIALS

Sigui f una funció. Considerem l'equació *y= f(x)*.

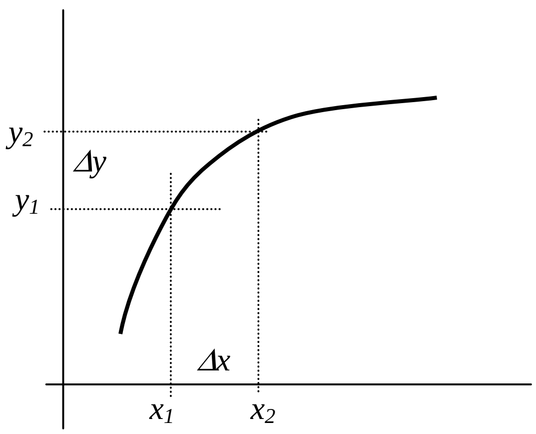
En moltes aplicacions la variable independent *x* varia lleugerament i necessitem trobar la variació corresponent de la variable dependent *y*.

Si *x* canvia de x_1 a x_2, llavors la magnitud del canvi s'escriu Δx

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{(\textit{Increment de x})}$$

La variable dependent canviarà des de $y_1=f(x_1)$ fins $y_2=f(x_2)$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{(\textit{Increment de y})}$$

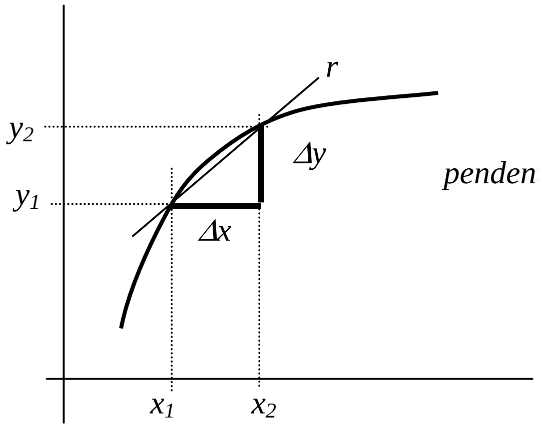


Podem utilitzar la notació amb increments per la definició de derivada d'una funció.

El que farem serà substituir la variació *h* de la variable independent pel seu increment Δx.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

la derivada de la funció f és el límit de la raó de l'increment Δy respecte l'increment Δx quan aquest darrer tendeix a zero



pendent de r = Δy/ Δx

Si Δx es va fent més petit la recta r tendeix a la recta tangent a la funció en el punt inicial x_1.

Direm per tant que la derivada d'una funció en un punt és el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt

Geomètricament es pot escriure que quan $\Delta x \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$

Llavors: $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x \quad quan \quad \Delta x \approx 0$

Sigui $y = f(x)$ on f és derivable i Δx un increment de x.

Llavors :

- El **diferencial *dy*** de la variable dependent y ve donada per $dy=f'(x)\cdot\Delta x$
- El **diferencial *dx*** de la variable independent x ve donat per $dx = \Delta x$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Exemple

Sigui $y = x^4 - 3x^2 + 5x + 4$

Trobeu dy; el valor de dy per x = 2 i Δx = - 0.1

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$$

$$dy = f'(x)\cdot dx = \left(4x^3 - 6x + 5\right) dx$$

per x = 2 ; $dy = \left(4\cdot 2^3 - 6\cdot 2 + 5\right) dx = 25\cdot dx$

per x = 2 i Δx = dx = - 0.1 ; $dy = 25\cdot(-0.1) = -2.5$

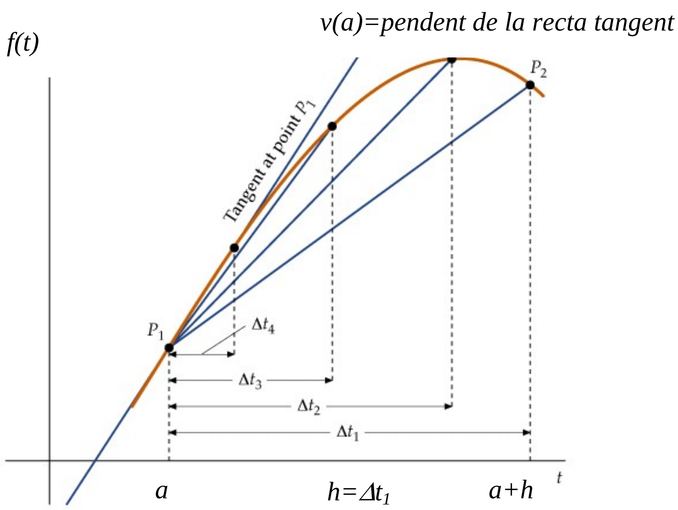
Concepte de velocitat instantània

Ara podem tornar al concepte de velocitat instantània d'un mòbil en moviment unidimensional.

Definíem aquesta magnitud com:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aquesta expressió ens dóna la velocitat a l'instant *a* d'un mòbil que es mou en línia recta segons la funció *f(t).*



A partir d'aquest moment utilitzarem la lletra *s* per denotar funcions que representen distàncies mesurades a lo llarg de línies rectes.

La coordenada del punt P a l'instant t serà $s(t)$.

La velocitat en aquest instant serà $v(t) = s'(t)$

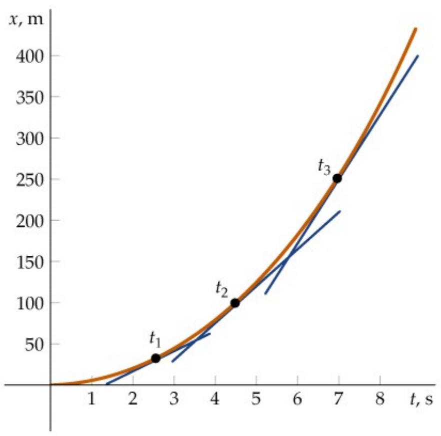
Aquesta funció velocitat instantània la podem escriure com:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Exemple

La posició d'una pedra que a partir del repòs es deixa caure des d'un penyasegat ve donada per $x = 5 \cdot t^2$, on x es mesura en metres i cap avall, quan t es mesura en segons.

Determineu la velocitat en un instant t qualsevol.



$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t^2\right) = 10t$$

Observem que per cada valor de t (t_1, t_2 , t_3,...) la velocitat és diferent , ja que el pendent de la recta tangent a la corba que representa la funció $x = 5 \cdot t^2$, varia a cada punt.

Concepte d'acceleració

L'acceleració és la variació amb el temps de la velocitat instantània.

Es defineix ***acceleració mitjana*** en un interval de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ com la raó entre la variació de velocitat i el temps tardat en variar.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Aquesta magnitud ens diu quin és el promig del canvi de la velocitat en l'interval de temps Δt.

Igual que en el cas de la velocitat, podem definir ***acceleració instantània*** com el límit de la velocitat mitjana quan l'increment de temps tendeix a zero.

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

Exemple

La funció de posició d'un punt P que es mou sobre una recta ve donada per:

$$s(t)=t^3-12t^2+36t-20 \qquad (t\ en\ s\ ;\ s\ en\ cm)$$

Descriviu el moviment de P a l'interval [0 , 9].

Derivem per obtenir la funció velocitat instantània:

$$v(t)=s'(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^3-12t^2+36t-20\right)=3t^2-24t+36 \qquad \left({}^{cm}\!/_{s}\right)$$

Derivem la funció velocitat per obtenir la funció acceleració:

$$a(t)=v'(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(3t^2-24t+36\right)=6t-24 \qquad \left({}^{cm}\!/_{s^2}\right)$$

Deduïm de la funció v(t) que el punt P està en repós quan:

v(t)=0, $3t^2-24t+36=0$, $3(t^2-8t+12)=0$; $3(t-2)(t-6)=0$ ➔ *per t = 2 s i t = 6 s .*

interval de temps	signe de v(t)	sentit del moviment
$0<t<2$	+	dreta
$2<t<6$	-	esquerra
$6<t<9$	+	dreta

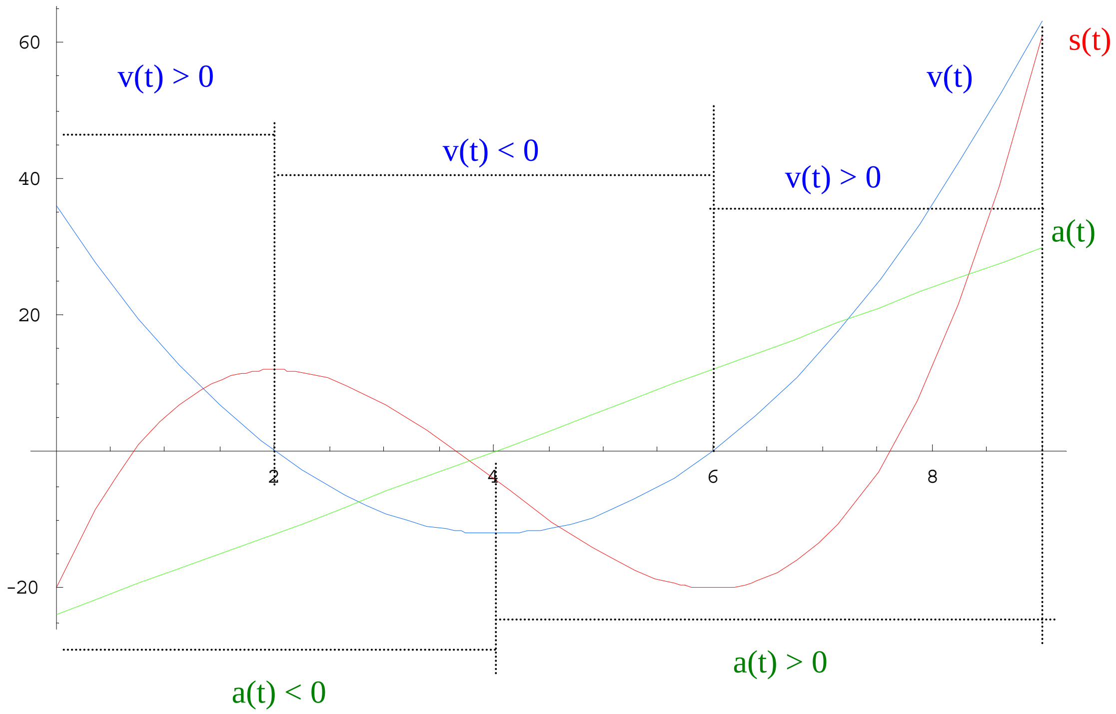
L'acceleració és nul·la per : 6 t – 24 = 0 ; t = 4 s

interval de temps	signe de a(t)
$0<t<4$	-
$4<t<9$	+

Deduïm que inicialment per *t = 0* la velocitat és de *36 cm/s* dirigida cap a la dreta i amb acceleració de *–24 cm/s²* que tendirà a frenar el moviment del punt P.

Aquesta acceleració negativa reduirà la velocitat fins que per *t = 2 s* el moviment s'atura (v(2)=0), i com segueix l'acceleració negativa el punt P començarà a moure´s cap a l'esquerra.

Fins a l'instant t= 6 s el punt P es mourà cap a l'esquerra , però abans d'aturar-se novament, experimentarà una inversió de l'acceleració per t= 4s . En aquest moment el moviment del punt P en lloc d'accelerar-se cap a l'esquerra s'anirà frenant en aquest sentit del moviment fins que per t=6 s s'aturarà i a partir de llavors tant la velocitat com l'acceleració seran positives , el que vol dir que el punt P anirà augmentant la velocitat i l'acceleració cap a la dreta sense parar.



APLICACIONS DE LA DERIVADA

Tots les quantitats que es troben en la vida diària canvien en el temps. Com per exemple:

- Un químic pot estar interessat en la quantitat que certa substància que es disol en aigua per unitat de temps.
- Un enginyer elèctric pot estar interessat en la forma en que canvia el corrent elèctric en un circuit per unitat de temps.
- . . .

Suposem que la variable w és funció del temps, *w = f(t)* , sent *f(t)* una funció derivable.

Definim ***la raó mitjana de canvi de la funció w = f(t) en l'interval, [t , t+h]*** com:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Definim ***la raó de canvi de la funció w = f(t) respecte de t*** com:

$$\frac{dw}{dt} = f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Exemples:

a) Un científic troba que si s'escalfa certa substància , la temperatura després de t minuts , en l'interval $0 \le t \le 5 \text{ min}$ ve donada per:

$$T = f(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8 \quad {}^{o}C$$

1. Trobeu la raó mitjana de canvi de g(t) durant l'interval [4 , 4.41]
2. Trobeu la raó de canvi de f(t) per t=4 min

1.-

$$f(4.41) = 30\cdot 4.41 + 6\sqrt{4.41} + 8 = 152.9 \quad {}^{o}C$$

$$f(4) = 30\cdot 4 + 6\sqrt{4} + 8 = 140 \quad {}^{o}C$$

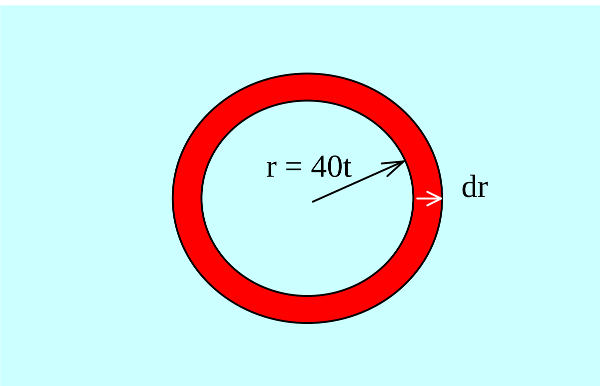
$$\frac{f(4.41)-f(4)}{0.41} = \frac{152.9-140}{0.41} = \frac{12.9}{0.41} = 31.46\ {}^{o}C/_{\min}$$

2.-

$$f'(t) = \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(30t + 6\sqrt{t} + 8\right) = 30 + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot(t)^{\frac{-1}{2}} = 30 + \frac{3}{\sqrt{t}}$$

$$f'(4) = 30 + \frac{3}{\sqrt{4}} = 31.5\ {}^{o}C/_{\min}$$

b) Llencem una pedra a un llac i dóna lloc a ones circulars. Suposant que el radi de les ones després de *t* segons és de *40t* centímetres, trobeu la raó de canvi respecte *t* de l'àrea del cercle format per l'ona.



r = f(t) = 40 · t cm

Àrea del cercle de radi *r*

$$A = \pi\cdot r^2 \quad \Rightarrow$$

$$A(t) = \pi\cdot[r(t)]^2 = \pi\cdot[40t]^2 = 1600\pi\cdot t^2\ cm^2$$

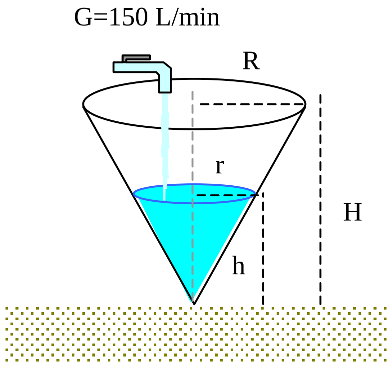
Quan canvia *t* en un *dt* l'àrea canviarà en un *dA*:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1600\pi t^2\right) = 3200\pi\cdot t \quad cm^2/_{s}$$

it de 12 m d'altura i 6 m
de radi de la base.

Bombegem aigua al dipòsit a raó de 150 L/min.

determineu la raó de canvi del nivell d'aigua quan la profunditat és de 3 m.



Observant la figura podem relacionar els triangles rectàngles de bases R i r,

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h} \quad \Rightarrow \quad r=h\cdot\frac{R}{H}=h\cdot\frac{6}{12}=0.5\cdot h$$

El volum d'aigua en un moment donat serà:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\pi\,(0.5h)^2\cdot h=\frac{1}{12}\cdot\pi\cdot h^3$$

El que necessitem saber és el canvi d'altura *dh* en el temps en funció del canvi de volum *dV* d'aigua dins del dipòsit en el temps :

Per tant: $$\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{3}{12}\cdot\pi\cdot h^2\cdot\left(\frac{dh}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dh}{dt}\right)=\frac{12}{3\cdot\pi\cdot h^2}\cdot\left(\frac{dV}{dt}\right)$$

Per: *h= 3 m* i $\dfrac{dV}{dt}=150\ L/\min=150\cdot10^{-3}\ m^3/\min$

llavors:

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)=\frac{12}{3\cdot\pi\cdot h^2}\cdot\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{4}{\pi\cdot3^2}\cdot\left(150\cdot10^{-3}\right)=0.0212\ {}^{m}\!/_{\min}=2.12\ {}^{cm}\!/_{\min}$$

No sempre trobem canvis respecte del temps, podem trobar magnituds que experimenten canvis respecte altres magnituds. Veiem uns quants exemples:

a) La resistència elèctrica d'un fil de Cu de longitud fixa és inversament proporcional al quadrat del diàmetre D.

Determineu la raó de canvi de la resistència R respecte el diàmetre D .

$$R=f(D)=\frac{C}{D^2}$$

$$\frac{dR}{dD}=\frac{d}{dD}\left(\frac{C}{D^2}\right)=-\frac{2\cdot C}{D^3}$$

b) La fórmula de la dilatació adiabàtica de l'aire és : $P{\cdot}V^{1.4} = C$ on *P* és la pressió i *V* el seu volum.

Determineu l'expressió que ens dóna el canvi de la pressió quan canvia el volum :

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{adiabaticament}$$

$P{\cdot}V^{1.4} = C$ llavors $P = C{\cdot}V^{(-1.4)}$

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV}\left(C{\cdot}V^{(-1.4)}\right) = -1.4{\cdot}C{\cdot}V^{(-2.4)}$$

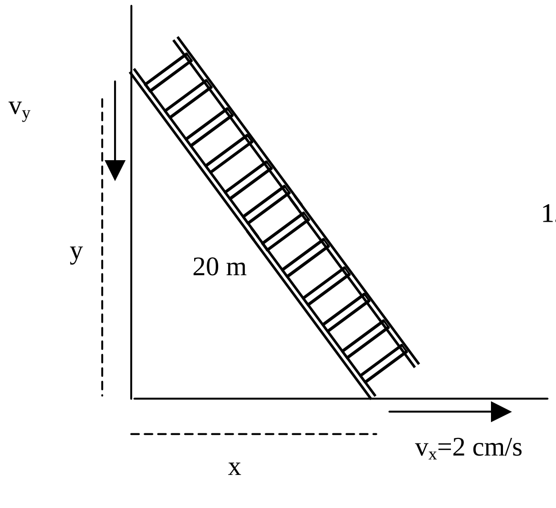
Si *V= 1 L* i *C = 12.78 Pa·m³* , el canvi de la pressió al canviar el volum serà:

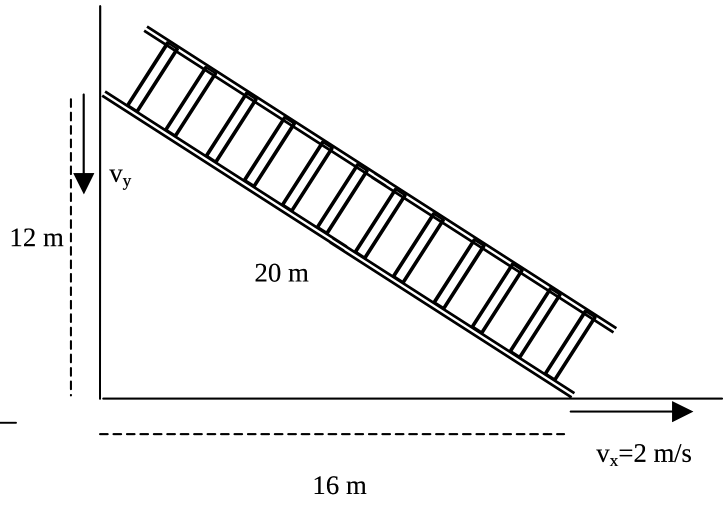
$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{V=1L} = \frac{d}{dV}\left(C{\cdot}V^{(-1.4)}\right) =$$

$$-1.4{\cdot}12.78{\cdot}(10^{-3})^{(-2.4)} = -17.892{\cdot}10^{-7.2} = 1.128{\cdot}10^{-7}\ Pa/m^3 = 1.128{\cdot}10^{-4}\ Pa/L$$

c) Una escala de 20 m de llarg està recolzada contra un edifici vertical. La base de l'escala rellisca horitzontalment a raó de 2 cm/s.

Determineu la velocitat en que rellisca l'altre extrem de l'escala quan es troba a 12 m d'altura.





L'escala , la paret i el terra formen un triangle rectangle de 20 m d'hipotenusa.

Pel teorema de Pitàgoras: $\sqrt{x^2 + y^2} = 20^2$

llavors: $y = \sqrt{400 - x^2}$

Si sabem la forma en que canvi en el temps la *x* , $v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \ {cm}/{s}$, sabrem la forma en que canvia en el temps la *y* , i el ritme del canvi quan y = 12 m i x = 16 m.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{400 - x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{400 - x^2}} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$v_y = \frac{-x}{\sqrt{400 - x^2}} \cdot v_x \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{-16}{\sqrt{400 - 16^2}} \cdot 2 = \frac{-32}{12} = -2.\widehat{6} \ {cm}/{s}$$

Regles Generals de Derivació

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}(cx) = c$

3. $\dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

4. $\dfrac{d}{dx}(f \pm g) = \dfrac{df}{dx} \pm \dfrac{dg}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}(cf) = c\dfrac{df}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}(fg) = \dfrac{df}{dx}g + f\dfrac{dg}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\left(df/dx\right)g - f\left(dg/dx\right)}{g^2}$

8. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)

9. $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{du}}$

10. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df / du}{dx / du}$

Derivades de les funcions trigonomètriques

1. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

2. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

3. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

4. $\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\dfrac{d}{dx}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

Derivades de les funcions exponencials i logarítmiques

1. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

2. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

3. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

4. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

5. $\dfrac{d}{dx}u^v = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + u^v \ln u \dfrac{dv}{dx}$

Demostració de les derivades de les funcions simples

$\boxed{f(x) = C}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f(x) = C \qquad f'(x) = 0$$

$\boxed{f(x) = x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$

$\boxed{f(x) = x^n}$ *on* $n \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n \cdot h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 \cdot h^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 \cdot x^n \cdot 1 + n \cdot x^{n-1} \cdot h + 1/2 \cdot n \cdot (n-1)\, x^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + 1 \cdot 1 \cdot h^n - x^n}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + \cancel{h} \cdot \left(n \cdot x^{n-1} + 1/2 \cdot n \cdot (n-1)\, x^{n-2} \cdot h + \cdots + h^{n-1}\right) - \cancel{x^n}}{\cancel{h}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(n \cdot x^{n-1} + 1/2 \cdot n \cdot (n-1)\, x^{n-2} \cdot h + \cdots + h^{n-1}\right) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\boxed{f(x) = \boldsymbol{sin}\, x}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{\boldsymbol{sin}(x+h) - \boldsymbol{sin}(x)}{h} = \cdots \left\langle \boldsymbol{sin}\,\alpha - \boldsymbol{sin}\,\beta = 2\,\boldsymbol{cos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\rangle \cdots =$$

$$\underset{h\to 0}{Lim} \frac{2\,\boldsymbol{cos}\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{\boldsymbol{cos}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{\boldsymbol{cos}\left(x+h/2\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} =$$

$$\underset{h\to 0}{Lim}\left\{\boldsymbol{cos}\left(x+h/2\right)\right\}\cdot \underset{h\to 0}{Lim}\left\{\frac{\boldsymbol{sin}\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}\right\} = \cdots \left\langle \underset{x\to 0}{Lim} \frac{\boldsymbol{sin}\,x}{x} = 1\right\rangle \cdots = \boldsymbol{cos}\,x \cdot 1 = \boldsymbol{cos}\,x$$

$$f(x) = \boldsymbol{sin}\,x \quad , \quad f'(x) = \boldsymbol{cos}\,x$$

$$\boxed{f(x) = \boldsymbol{cos}\, x}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lim} \frac{\boldsymbol{cos}(x+h) - \boldsymbol{cos}(x)}{h} = \cdots \left\langle \boldsymbol{cos}\,\alpha - \boldsymbol{cos}\,\beta = -2\,\boldsymbol{sin}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\rangle \cdots =$$

$$\underset{h\to 0}{Lim} - \frac{2\,\boldsymbol{sin}\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim} - \frac{\boldsymbol{sin}\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} = \underset{h\to 0}{Lim} - \boldsymbol{sin} \frac{\boldsymbol{cos}\left(x+h/2\right)\cdot \boldsymbol{sin}\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} =$$

$$\underset{h\to 0}{Lim}\left\{-\,\boldsymbol{sin}\left(x+h/2\right)\right\}\cdot \underset{h\to 0}{Lim}\left\{\frac{\boldsymbol{sin}\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}\right\} = \cdots \left\langle \underset{x\to 0}{Lim} \frac{\boldsymbol{sin}\,x}{x} = 1\right\rangle \cdots = -\,\boldsymbol{sin}\,x \cdot 1 = -\,\boldsymbol{sin}\,x$$

$$f(x) = \boldsymbol{cos}\,x \quad , \quad f'(x) = -\,\boldsymbol{sin}\,x$$

$$\boxed{f(x) = \ln x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \dfrac{(x+h)}{x}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left\{\ln\left[\frac{(x+h)}{x}\right]^{\frac{1}{h}}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\ln\left[1+\frac{h}{x}\right]^{\frac{1}{h}}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\ln\left[1+\frac{1}{x/h}\right]^{\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{x}}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\ln\left[1+\frac{1}{x/h}\right]^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}\right\} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left\{\ln\left[1+\frac{1}{x/h}\right]^{\frac{1}{h}}\right\}^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}} = \ln\left\{\lim_{h\to 0}\left[1+\frac{1}{x/h}\right]^{\frac{1}{h}}\right\}^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}} = \ln e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln x \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivada de la suma de funcions

$$\boxed{f(x) = u(x) + v(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] = u'(x)+v'(x)$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \qquad\qquad f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Regla de la cadena

$f(x) = g(u)$ *on* $u = u(x)$ es dir $\boxed{f(x) = (g \circ u)(x) = g\left[u(x)\right]}$

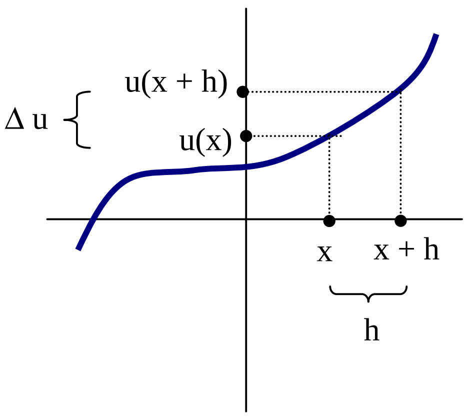
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}\right]$$

on $\Delta u = u(x+h) - u(x)$

Sabem que quan $h \to 0$ $(\Delta x \to 0)$ llavors $u(x+\Delta x) \to u(x)$

Es dir: si $\Delta x \to 0, (h \to 0)$ llavors $\Delta u \to 0$ (*)

Ja que *f(x) = g[u(x)]*, podem substituir:



$f(x+h) = g[u(x+h)]$ *on* $g[u(x+h)] = g[u+\Delta u]$

i

$f(x) = g[u(x)]$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{h}\right] = \underbrace{\lim_{h\to 0}}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta u}\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}$$

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta u\to 0}}\left[\frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u}\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = g'[u(x)]\cdot u'(x)$$

(*)

$f(x) = (g \circ u)(x) = g\left[u(x)\right]$ $f'(x) = g'[u(x)]\cdot u'(x)$

Aplicació de derivades logarítmiques

$\boxed{f(x)=e^x}$

Sigui $g(x)=\ln f(x)$

Calculem $g'(x)$ aplicant la regla de la cadena: $g'(x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

Però: $g(x)=\ln f(x)=\ln\left[e^x\right]=x \quad\to\quad g'(x)=1$

Llavors: $1=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \quad\to\quad f'(x)=f(x) \quad\to\quad f'(x)=e^x$

$f(x)=e^x$ $\qquad$ $f'(x)=e^x$

Derivada d'un producte de funcions

$\boxed{f(x)=u(x)\cdot v(x)}$

Sigui $g(x)=\ln f(x)=\ln[u(x)\cdot v(x)]=\ln[u(x)]+\ln[v(x)]$

Calculem $g'(x)$ aplicant la regla de la cadena: $g'(x)=\dfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)+\dfrac{1}{v(x)}\cdot v'(x)$

Però: $g'(x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

Comparant: $\dfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)+\dfrac{1}{v(x)}\cdot v'(x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

I per tant:

$$f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)+\frac{1}{v(x)}\cdot v'(x)\right)=\left[u(x)\cdot v(x)\right]\cdot\left(\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)+\frac{1}{v(x)}\cdot v'(x)\right)$$

$f'(x)=v(x)\cdot u'(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$f(x)=u(x)\cdot v(x)$ $\qquad$ $f'(x)=v(x)\cdot u'(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Derivada d'un quocient de funcions

$$\boxed{f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}}$$

Sigui $g(x)=\ln f(x)=\ln\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\ln[u(x)]-\ln[v(x)]$

Calculem $g'(x)$ aplicant la regla de la cadena: $g'(x)=\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)-\frac{1}{v(x)}\cdot v'(x)$

Però: $g'(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

Comparant: $\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)-\frac{1}{v(x)}\cdot v'(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

I per tant:

$$f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)-\frac{1}{v(x)}\cdot v'(x)\right)=\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\left(\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)-\frac{1}{v(x)}\cdot v'(x)\right)$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{v(x)}-\frac{u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \qquad f'(x)=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Altres derivades

$$\boxed{f(x)=\tan x}$$

Com: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

Aplicarem la derivada d'un quocient:

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x)=\tan x \qquad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$\boxed{f(x) = \arcsin x}$

Expressarem: $y = \arcsin x \quad \to \quad \sin y = x$

Suposem les funcions: $f(x) = \arcsin x$ i $g(x) = \sin x$

La funció composta : $h(x) = (g \circ f)(x) = \sin(\arcsin x) = x$

Derivem aplicant la regla de la cadena:

$$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = \cos[f(x)] \cdot f'(x) = \cos y \cdot f'(x)$$

Per tant: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ja que $\sin y = x$.

$$f(x) = \arcsin x \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{f(x) = \arccos x}$

Expressarem: $y = \arccos x \quad \to \quad \cos y = x$

Suposem les funcions: $f(x) = \arccos x$ i $g(x) = \cos x$

La funció composta : $h(x) = (g \circ f)(x) = \cos(\arccos x) = x$

Derivem aplicant la regla de la cadena:

$$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = -\sin[f(x)] \cdot f'(x) = -\sin y \cdot f'(x)$$

Per tant: $f'(x) = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ja que $\cos y = x$.

$$f(x) = \arccos x \qquad\qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{f(x) = \arctan x}$$

Expressarem: $y = \arctan x \quad \to \quad \tan y = x$

Suposem les funcions: $f(x) = \arctan x$ i $g(x) = \tan x$

La funció composta : $h(x) = (g \circ f)(x) = \tan(\arctan x) = x$

Derivem aplicant la regla de la cadena:

$$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot f'(x) = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \cdot f'(x) = (1 + \tan^2 y) \cdot f'(x)$$

Per tant: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$ ja que $\tan y = x$.

$$f(x) = \arctan x \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

Tindrem em compte que: $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

en efecte : si $\log_a N = X \quad \Rightarrow \quad a^X = N \qquad (1)$

$\log_b N = Y \quad \Rightarrow \quad b^Y = N \qquad (2)$

$\log_b a = Z \quad \Rightarrow \quad b^Z = a \qquad (3)$

Substituint (3) en (1) $\quad a^X = N \quad \to \quad (b^Z)^X = N \quad \to \quad b^{Z \cdot X} = N$

i comparant amb (2) ,

$$b^Y = b^{Z \cdot X} \to \quad Y = Z \cdot X \quad \to \quad X = \frac{Y}{Z} \quad \Rightarrow \quad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Així podem posar : $f(x) = \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

i per tant: $f'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \log_a x \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$\boxed{f(x) = a^x}$

Suposem la funció: $g(x) = \ln[f(x)] = \ln(a^x) = x \cdot \ln a$

Derivem : $g'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ o $g'(x) = \ln a$

llavors: $\ln a = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = (\ln a) \cdot f(x) = (\ln a) \cdot a^x$

$f(x) = a^x$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$