TEMA 6 .- MATRIUS I DETERMINANTS

Matrius. Definicions

Una matriu consisteix en una caixa on es col·loquen números, lletres o variables d'una forma ordenada. Aquests números, lletres o variables en general els anomenarem elements de la matriu. Una matriu es doncs un conjunt d'elements ordenats en files i columnes. Aquests elements els escriurem amb lletres que contenen dos subíndexs. El primer indica la fila en la qual es troba l'element i el segon la columna.

DEFINICIÓ DE MATRIU: Una matriu A d'ordre m × n és un conjunt de m files i n columnes pertanyent a un cos, que representarem de la següent manera:

$$\begin{array}{ccl} & \text{columnes} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \text{files} \end{array}$$

Normalment representarem les matrius per lletres majúscules i cada element de la matriu d'una forma abreujada

$$A = \left(a_{ij}\right), i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$$

ó simplement

$$\left(a_{ij}\right)$$

recordant que el primer índex indica la fila i el segon índex la columna.

S'anomena **matriu fila** a tota matriu composta per una única fila i qualsevol nombre de columnes. El seu ordre serà 1 × n, amb n el nombre de columnes, és a dir

$$A_{fila} = \left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\right) = \left(a_{1j}\right)$$

Anomenarem matriu columna a tota matriu composta per una única columna i qualsevol nombre de files. El seu ordre serà m × 1, amb m el nombre de files, es a dir

$$A_{columna} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \left(a_{i1}\right)$$

Si m = n obtenim una **matriu quadrada**, amb tantes files com columnes. En el cas que m ≠ n obtenim una **matriu rectangular**, llavors el nombre de files és diferent del nombre de columnes.

El conjunt de les matrius d'ordre m × n l'indicarem amb la notació $M_{m \times n}$. Seguint aquesta notació totes les matrius quadrades formaran part del conjunt de matrius $M_{n \times n}$.

DEFINICIÓ DE MATRIU NUL·LA: Una matriu A és nul·la si tots els seus elements son zero. Es a dir A és nul·la si

$$\left(a_{ij}\right) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, m; \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

DEFINICIÓ DE DIAGONAL PRINCIPAL: Si A és una matriu quadrada d'ordre n, s'anomena diagonal principal als elements que tenen els dos subíndexs iguals

$$\left(a_{ii}\right), i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemple: En el cas de $M_{3\times 3}$, els elements de la diagonal principal son

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓ D'ELEMENTS CONJUGATS: Els elements conjugats d'una matriu m×n, son aquells que ocupen una posició simètrica respecte la diagonal principal. Per exemple, el conjugat de a_{ij} és l'element a_{ji}. Fixeu–vos en els conjugats següents

$$\begin{pmatrix} \ddots & a_{ij} & a_{ik} & a_{in} \\ a_{ji} & \ddots & a_{jk} & a_{jn} \\ a_{ki} & a_{kj} & \ddots & a_{kn} \\ a_{ni} & a_{nj} & a_{nk} & \ddots \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓ DE TRAÇA: La traça d'una matriu quadrada A és la suma dels elements de la diagonal principal.

$$Traça\ A = Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple 1: Un exemple de matriu (3×4) en el cos dels real és de la forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5.6 & 4 & 4.6 \\ 2 & 5.5 & -3 & 3.4 \\ 0.25 & 2.3 & 1.3 & 2.2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2: Una matriu (2×2) en el cos dels complexes, per exemple, és de la forma

$$\begin{pmatrix} 2+3i & 5i \\ i & 1-4i \end{pmatrix}$$

*Exemple 3: Una matriu (3×3) **nul·la** és de la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 4: Una matriu també pot contenir funcions trigonomètriques

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin a \end{pmatrix}$$

Exemple 5: Calculeu la traça de la següent matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: $Tr(A) = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$

Operacions amb Matrius

De la mateixa manera que podem definir operacions entre els elements d'un conjunt, també podem definir operacions entre matrius a partir dels elements que formen part de les matrius. Recordem que el conjunt de matrius $M_{m\times n}$ està definit en l'estructura algebraica de cos. Per tant, les operacions que definirem a continuació contenen tota la potència de càlcul d'aquesta estructura.

1. IGUALTAT DE MATRIUS: Donades dues matrius A i B del conjunt $M_{m\times n}$ tal que $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right)$ direm que les dues matrius són iguals si tots els seus elements són iguals i en el mateix ordre, és a dir:

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$$

2. SUMA DE MATRIUS: Donades dues matrius del mateix ordre m×n, és a dir $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right) \in M_{m\times n}$ és defineix la suma de A i B com la matriu:

$$A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$$

que de forma complerta escriurem com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple : Efectueu la suma de les següents matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La suma C serà

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. PRODUCTE PER UN ESCALAR: Donada una matriu $A \in M_{m\times n}$ i un número α, es defineix el producte d'aquest número (escalar) per la matriu A com:

$$\alpha \cdot A = \left(\alpha a_{ij}\right)$$

és a dir:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple : Efectueu el producte de l'escalar 2 amb la següent matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. TRANSPOSICIÓ D'UNA MATRIU: Donada una matriu A d'ordre m×n la operació de transposició converteix la matriu A en una altra d'ordre n×m que designarem per A^T i anomenarem matriu transposta d'A. Per fer-ho, la matriu A^T conté com a primera fila la primera columna d' A, per segona fila la segona columna, etc. És a dir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right) \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ji}\right)$$

Exemple 1: Trobeu la transposta de la matriu :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

Exemple 2: Trobeu la transposta de la matriu:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Solució:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -1 & 4 & 0\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

5. PRODUCTE DE MATRIUS: El producte de matrius és una generalització del producte escalar. A partir de dues matrius obtenim una altre matriu.

Definició 1.- Considerem una matriu fila A i una matriu columna B

$$A=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right) \quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

El producte de les dues matrius es defineix com:

$$A\cdot B=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

Definició 2.- Donada una matriu $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ d'ordre m×n i una altra matriu $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times p}$ d'ordre n×p, es defineix el producte matricial C = A·B, com la matriu $\left(c_{ij}\right)_{m\times p}$ amb l'element c_{ij} igual a:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

és a dir, l'element c_{ij} és el producte de la fila i–èsima d’ A per la columna j–èsima de B. De forma desenvolupada obtindrem:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Observem que el resultat del producte matricial A·B és una matriu d'ordre m×p. Els índexs n han desaparegut. Això indica que sempre que multipliquem dues matrius l'ordre de les columnes d’A ha de ser igual a l'ordre de les files de B.

$$\boxed{A \cdot B = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \left(b_{ij}\right)_{n\times p}}$$

índexs iguals

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \underbrace{a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}}_{\boxed{\text{fila i columna j}}} & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Exemple 1: Efectuem el producte matricial de dues matrius d'ordre (2×2), donades per:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Solució

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Exemple 2: Efectueu el producte matricial de les següents matrius:

a) Donades dues matrius (2×3) i (3×3):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

b) Dues matrius (2×2) i (2×3):

$$C=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Solució:

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(1)(3)+(0)(1)+(-1)(4) & (1)(-1)+(0)(0)+(-1)(-1) & (1)(1)+(0)(2)+(-1)(-2)\\ (2)(3)+(0)(1)+(0)(4) & (2)(-1)+(0)(0)+(0)(-1) & (2)(1)+(0)(2)+(0)(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

b)

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1)(1)+(6)(1) & (1)(2)+(6)(0) & (1)(0)+(6)(3)\\ (-1)(1)+(0)(1) & (-1)(2)+(0)(0) & (-1)(0)+(0)(3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 2 & 18\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

El producte matricial no és commutatiu

Exemple 3.-   PRODUCTE MATRICIAL NO COMMUTATIU

Considerem les dues matrius A i B definides per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenim que la matriu A és una matriu fila i la matriu B és una matriu columna, matemàticament ho escriurem

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1\times 3} \qquad B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 1}$$

El producte matricial de la matriu A per la matriu B ens donarà un escalar:

$$A \cdot B = \left(a_{ij}\right)_{1\times 3} \left(b_{ij}\right)_{3\times 1} = \left(c_{ij}\right)_{1\times 1}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(5) + (2)(3) + (4)(0) = 11$$

El producte   de la matriu B per la matriu A ens donarà una matriu (3×3):

$$B \cdot A = \left(b_{ij}\right)_{3\times 1} \left(a_{ij}\right)_{1\times 3} = \left(c_{ij}\right)_{3\times 3}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5)(1) & (5)(2) & (5)(4) \\ (3)(1) & (3)(2) & (3)(4) \\ (0)(1) & (0)(2) & (0)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.- Donada la següent matriu A , trobeu A^n. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Solució:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}$$

Exemple 5: Donada la següent matriu B, trobeu B^n.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = B \cdot 3B = 3B^2 = 3(3B) = 3^2 B$$

$$B^4 = B \cdot B^3 = B\left(3^2 B\right) = 3^2 B^2 = 3^2 (3B) = 3^3 B$$

$$\Rightarrow \boxed{B^n = 3^{n-1} B}$$

Tipus particulars de matrius

Hi ha matrius que per les seves propietats es interessant estudiar–les amb més deteniment. Algunes d'aquestes matrius les comentem a continuació.

MATRIU SIMÈTRICA

Una matriu quadrada A és simètrica si coincideix amb la seva transposta, $A = A^{T.}$ Això vol dir que si

$$A = \left(a_{ij}\right), A^{T} = \left(a_{ji}\right) \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

Exemple.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIU ANTISIMÈTRICA

Una matriu quadrada A és antisimètrica o hemisimètrica o alternada si és igual a la oposada de la seva transposta. $A = -A^{T}$. Es a dir

$$A = \left(a_{ij}\right), A^{T} = \left(a_{ji}\right) \Rightarrow \left(a_{ij}\right) = -\left(a_{ji}\right)$$

MATRIU DIAGONAL

S'anomena matriu diagonal a tota matriu A que solament conte elements en la seva diagonal principal.

$$A = \left(a_{ij}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ per } i = j \\ a_{ii} \neq 0 \text{ per algun } i \end{cases}$$

Exemples.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

MATRIU UNITAT

S'anomena matriu unitat o unitària a tota matriu diagonal que conté únicament l'element 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIU TRIANGULAR

S'anomena matriu triangular a tota matriu quadrada amb termes per sobre o sota la diagonal principal igual a zero i a l'altre costat existeix almenys algun element diferent de zero. Podem distingir entre matrius triangulars superiors i inferiors.

MATRIU PERIÒDICA

Una matriu quadrada A és periòdica si existeix un nombre natural *n* tal que

$$A^{n+1} = A$$

Si *n* és el menor nombre natural que ho compleix, es diu que la matriu A és periòdica de període *n*. En particular, si $n = 1$, es a dir si $A^2 = A$, la matriu s'anomena idempotent.

Exemple.- Determineu el període de la matriu periòdica següent.

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Solució

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} = A$$

És una matriu de període 2.

Forma bilineal alternada. Càlcul determinants

Considerem un espai vectorial V sobre el cos dels reals R i sigui $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ una base de l'espai vectorial V. Sobre aquests conjunts podem establir una aplicació bilineal T.

$$\begin{aligned} T : V \times V &\xrightarrow{T} \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) &\xrightarrow{T} T(\vec{x},\vec{y}) \end{aligned}$$

Al ser una aplicació bilineal compleix les següents propietats

1. $T(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = T(\vec{x},\vec{z}) + T(\vec{y},\vec{z})$
2. $T(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = T(\vec{x},\vec{y}) + T(\vec{x},\vec{z})$
3. $T(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda T(\vec{x},\vec{y})$
4. $T(\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda T(\vec{x},\vec{y})$

Introduïm les següents definicions, que ens seran útils en el desenvolupament dels determinants.

DEFINICIÓ D'APLICACIÓ SIMÈTRICA: Una aplicació bilineal $T : V \times V \to \mathbb{R}$ és simètrica si $T(\vec{x},\vec{y}) = T(\vec{y},\vec{x})$.

DEFINICIÓ D'APLICACIÓ ANTISIMÈTRICA: Una aplicació bilineal $T : V \times V \to \mathbb{R}$ és antisimètrica si $T(\vec{x},\vec{y}) = -T(\vec{y},\vec{x})$.

Un determinant és una aplicació bilineal antisimètrica

Determinant de segon ordre.

Considerem un determinant de segon ordre com una aplicació bilineal antisimètrica entre un espai vectorial V de base B = $\{e_1,e_2\}$ i el cos dels nombres reals R.

$$\begin{aligned} T : V \times V &\xrightarrow{T} \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) &\xrightarrow{T} T(\vec{x},\vec{y}) = -T(\vec{y},\vec{x}) \end{aligned}$$

Al ser B una base de l'espai vectorial V, la descomposició dels vectors $\vec{x}, \vec{y}$ en les seves components és

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$
$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$$

amb (x_1, x_2) les components del vector $\vec{x}$ i (y_1, y_2) les components del vector $\vec{y}$.

El resultat obtingut sobre les components dels vectors en la base B és el determinant d'ordre dos

$$\Delta = x_1y_2 - x_2y_1$$

Existeix una forma per recordar el resultat anterior, aquesta és:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Fixem–nos que el resultat del determinant és el mateix si canviem les files per les columnes. Una forma d'indicar–ho és

$$|A| = |A^T|$$

Propietats dels determinants d'ordre dos

Evidentment aquestes propietats son generalitzades a determinants d'ordre superior.

1. $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} a & \alpha c \\ b & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$
5. $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} = 0$
6. $\begin{vmatrix} a & c+\alpha a \\ b & d+\alpha b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Determinants de tercer ordre

Un determinant de tercer ordre és una aplicació trilineal antisimètrica entre un espai vectorial V de base B = {e_1,e_2,e_3} i el cos dels nombres reals R.

$$\begin{aligned} T : V \times V \times V &\xrightarrow{T} \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z}) &\xrightarrow{T} T(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \end{aligned}$$

Els vectors en aquesta base s'escriuran com

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3 \\ \vec{y} &= y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_3 \\ \vec{z} &= z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) &= T\left(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_3, z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3\right) = \\ &= x_1y_2z_3T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) + x_2y_3z_1T\left(\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_1\right) + x_3y_1z_2T\left(\vec{e}_3,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right) + \\ &+ x_2y_1z_3T\left(\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3\right) + x_1y_3z_2T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_2\right) + x_3y_2z_1T\left(\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1\right) = (*) \end{aligned}$$

Amb tot això, obtenim una manera d'identificar l'aplicació antisimètrica o alternada sobre els vectors de la base {e_1,e_2,e_3}.

$$\begin{aligned} T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) &= T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) & T\left(\vec{e}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_3\right) &= -T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) \\ T\left(\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_1\right) &= T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) & T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_2\right) &= -T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) \\ T\left(\vec{e}_3,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right) &= T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) & T\left(\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1\right) &= -T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) \end{aligned}$$

La continuació de (*) és llavors

$$\begin{aligned} &(*) = x_1y_2z_3(1)T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) + x_2y_3z_1(1)T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) + x_3y_1z_2(1)T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) + \\ &+x_2y_1z_3(-1)T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) + x_1y_3z_2(-1)T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) + x_3y_2z_1(-1)T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) = \\ &\left[x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1\right]T\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) \end{aligned}$$

Que es pot escriure en forma compacte com

$$T(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \sum_{ijk} x_iy_jz_k\epsilon_{ijk}T\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k\right)$$

El determinant de tercer ordre és doncs:

$$\det(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1$$

Que escriurem de forma abreujada com

$$\det(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1$$

que és coneix com a regla de Sarrus per calcular el valor d'un determinant d'ordre 3×3. Existeix una forma pnemotèctica per recordar com efectuar el determinant, més sencill que la general en forma compacte.

Productes positius

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Productes negatius

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemple.- Calculeu el valor del següent determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (1)(1)(3) + (2)(2)(5) + (3)(4)(4) - (4)(1)(5) - (3)(3)(2) - (4)(2)(1) = 25$$

Propietats dels determinants

Propietat 1 .- El determinant d'un matriu A i el de la seva transposta A^T son iguals.

$$|A| = |A^T|$$

Donat que tots els termes del determinant $|A|$ estan formats per el producte de n elements, un de cada fila i un de cada columna, llavors cada un d'aquests productes pertany al determinant $|A^T|$. D'altre banda, la permutació que indica files en el primer determinant és la mateixa que indica files en el segon, llavors el signe de cada producte és el mateix.

Propietat 2.- Si tots els elements d'una fila o columna contenen un factor comú, aquest es pot treure del determinant. Es a dir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cada terme del primer determinant és de la forma :

$$a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots \left(\alpha a_{i\sigma(i)}\right) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

de manera que α pot sortir factor comú. Com que el determinant és una suma de les permutacions on intervindrà sempre un element de la fila o columna i, sempre apareix el terme α i per tant surt factor comú d'una suma de termes.

Propietat 3.- Si una matriu conte una fila o columna, constituïda únicament per zeros, el determinant és igual a zero.

És clar que al efectuar el sumatori del desenvolupament del determinant, hi haurà un element de la fila o columna de zeros. Per tant tots els termes del sumatori son zero i conseqüentment la suma també val zero.

Propietat 4.- Si es multipliquen o divideixen per λ tots els elements d'una fila o columna, el valor del determinant queda multiplicat o dividit per λ.

És evident ja que com a conseqüència de la definició de determinant al quedar multiplicat cada sumant del desenvolupament del determinant per λ, la suma quedarà multiplicada per λ.

Propietat 5.- Si s'intercanvien dues files o columnes d'un determinant, aquest canvia de signe.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Un terme qualsevol del primer determinant serà de la forma

$$a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

al intercanviar una fila o columna per una altre, la ordenació de les permutacions canviarà també i obtindrem

$$a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

canviant el signe de la permutació i per tant el signe de tots els termes del sumatori. ç

Propietat 6 .- Si un determinant conte dues files o columnes iguals, el determinant val zero.

Considerem que $\left|A^*\right|$ és el determinant amb les files o columnes canviades. Segons la propietat anterior $|A| = -\left|A^*\right|$, però en aquest cas la matriu amb el canvi de files o columnes és la mateixa, es a dir $A = A^*$. Llavors

$$|A| = -\left|A^*\right| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

Propietat 7 .- Si un determinant conte dues files o columnes proporcionals, el seu valor és zero.

És una conseqüència de la propietat 6 i 2. Es pot treure el factor proporcional fora del determinant i ens quedaran dues files o columnes iguals, llavors el determinant segons la propietat 6 és zero.

Propietat 8 .- En un determinant, si a una fila o columna se li afegeix una combinació lineal d'altres files o columnes, el valor del determinant no varia.

Menor i adjunt d'un element

DEFINICIÓ DE MENOR COMPLEMENTARI: S'anomena menor complementari de l'element a_{ij} al determinant que resulta de suprimir la fila i–èsima i la columna j–èsima. El designarem per M_{ij}

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)j-1} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{(i-1)j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ & & & & & a \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)j-1} & a_{(i+1)j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Per exemple, el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

té els menors complementaris

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

DEFINICIÓ D'ADJUNT: S'anomena adjunt d'un element a_{ij} i es representa per A_{ij} al valor

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Amb tot això, l'adjunt d'un element és el seu menor complementari multiplicat per un signe que depèn de la posició de l'element. Observem que

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{(1+1)} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} \\ A_{12} &= (-1)^{(1+2)} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12} \\ A_{21} &= (-1)^{(2+1)} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -M_{21} \\ A_{22} &= (-1)^{(2+2)} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = M_{22} \end{aligned}$$

de manera que el signe positiu i negatiu es van alternant a traves dels elements.

Exemple .- Els adjunts A_{11} ,A_{22} ,A_{32} d'una matriu (3×3) són:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

TEOREMA: El valor d'un determinant és igual a la suma dels elements d'una fila o columna multiplicats pels seus respectius adjunts. És a dir, si

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Llavors el valor del determinant es pot calcular desenvolupant per la fila i–èsima

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

o desenvolupant per la columna j–èsima

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

per qualsevol que sigui i, j.

Exemple.- Trobar el valor del determinant a partir dels seus menors.

Desenvolupem per la primera columna

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ -5 & 0 & 3 & -2 \\ 7 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 6 \end{vmatrix} -$$

$$- 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -5 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Si desenvolupem per la segona columna és molt mes ràpid

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ -5 & 0 & 3 & -2 \\ 7 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -1\left[5\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= -1\left[5(6 \cdot 6 + 2 \cdot 1) + 7(-6 \cdot 2 + 3)\right] = -127$$

TEOREMA: El determinant del producte de dues matrius quadrades del mateix ordre és igual al producte dels dos determinants.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Rang d'una matriu

En l'estudi de la independència lineal i per tant de la determinació de bases d'un espai o subespai vectorial, els determinants son decisius alhora de no complicar–nos l'existència aritmètica. En l'estudi del rang d'una matriu conflueixen els temes de vectors, matrius i determinants.

DEFINICIÓ DE RANG D'UNA MATRIU: Donada una matriu A de qualsevol ordre n×m, el rang de A és el nombre màxim de vectors fila o columna linealment independents.

TEOREMA: El rang d'una matriu A és igual a l'ordre del major menor complementari no nul.

*Exemple.- Determineu el rang de la següent matri*u

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Observem que presenta el menor d'ordre dos no nul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

i els menors d'ordre 3 son zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

El rang de la matriu serà dos.

Algunes vegades el nombre de menors que s'han de considerar som molts i això dificulta el procés de trobar el rang de la matriu. En aquest cas resulta pràctic realitzar transformacions que, conservant el rang de la matriu, procurin obtenir el major nombre d'elements iguals a zero com sigui possible. Aquestes transformacions es basen en les propietats dels determinants.

Transformacions que conserven el rang d'una matriu

1. Multiplicar tots els elements d'una fila o columna per un nombre diferent de zero.

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sumar a una fila (columna) una combinació lineal de les altres files (columnes).

$$rang\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Suprimir una fila (columna) amb tots els seus elements iguals a zero.
4. Suprimir una fila (columna) que sigui combinació lineal d'altres.
5. Intercanviar dues files o dues columnes.

Mètode de Gauss

El mètode de Gauss utilitza les propietats anteriors per obtenir una matriu triangular de manera que el càlcul del determinar sigui immediat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & -8 & 8 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El rang de A és tres ja que hi ha tres files independents o per què hi ha una menor d'ordre tres diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$