TEMA 1.- ELS NOMBRES REALS

- $\mathbb{N}$ és el ***conjunt dels nombres naturals*** : $\mathbb{N}$ ={1,2,3,…}.

Aquest nombres es poden obtenir sumant successivament el nombre 1 amb sí mateix.
Com sabem els nombres naturals es poden sumar i multiplicar complint les propietats :

- $a + b = b + a$ *per qualsevol* $a, b \in \mathbb{N}$ ***propietat commutativa de la suma***
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ *per qualsevol* $a, b, c \in \mathbb{N}$ ***propietat associativa de la suma***
- $a \cdot b = b \cdot a$ *per qualsevol* $a, b \in \mathbb{N}$ ***propietat commutativa del producte***
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *per qualsevol* $a, b, c \in \mathbb{N}$ ***propietat associativa del producte***
- $a \cdot 1 = a$ *existència de* ***l'element unitat***
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)$ *per qualsevol* $a, b, c \in \mathbb{N}$ ***propietat distributiva del producte respecte de la suma.***

- $\mathbb{Z}$ és el **<u>conjunt dels nombres enters</u>**: $\mathbb{Z}$ = {...-3,-,2,-1,0,1,2,3,...}.

Els enters són tots els nombres positius i negatius junt amb el nombre real zero, 0 .

Les propietats de les operacions són les mateixes que a $\mathbb{N}$, i a més la suma té element neutre , el zero, i qualsevol terme té el seu oposat :

$$a+(-a)=0$$

- $\mathbb{Q}$ és el ***conjunt dels nombres racionals***.

Un nombre racional és un nombre que es pot expresar com un quocient $q = a/b$, on a i b són nombres enters i $b \neq 0$.
Un nombre racional admet diverses representacions en forma de fraccions equivalents:

Es diu que a/b *és equivalent a* c/d *si* $a \cdot d = b \cdot c$ *, on a,b,c,d són nombres enters i* $b \neq 0, d \neq 0$.

També cada nombre racional admet una representació decimal.

Per exemple:

$$\frac{15}{2} = 7.5$$

$$\frac{100}{3} = 33.333...$$

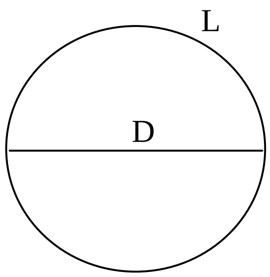
La representació decimal d'un nombre racional sempre és periòdica.

Els procediments per sumar i multiplicar fraccions són coneguts.
Respecte a les propietats de $\mathbb{Q}$, en té una de nova respecte de les propietats de $\mathbb{Z}$:

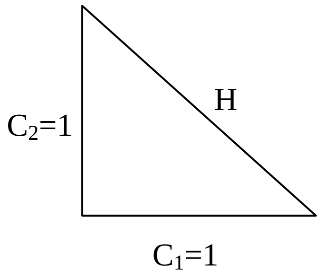
Qualsevol nombre racional excepte el 0 té element invers : $q \cdot \frac{1}{q} = 1$

Una propietat important de $\mathbb{Q}$ és que entre qualsevol parella de nombres racionals hi ha infinits nombres racionals.

Malgrat que entre dos nombres racionals qualsevol sempre podem trobar infinits nombres racionals, amb aquests nombres no podem representar per exemple el quocient entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre, o la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles amb catets iguals.



$$\frac{L}{D} \notin \mathbb{Q}$$



$$H = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Tots els nombres que no poden representar-se com un nombre decimal periòdic (per una fracció) s'anomenen nombres irracionals.

- $\mathbb{R}$ és el ***conjunt dels nombres reals*** que és la unió del conjunt dels nombres racionals més els irracionals.

Les propietats dels nombres reals, respecte de les operacions suma i producte compleix les propietats següents:

$S1)\quad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad , \quad a + (b + c) = (a + b) + c$

$S2)\quad \forall a,b \in \mathbb{R} \quad , \quad a + b = b + a$

$S3)\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad a + 0 = 0 + a = a$

$S4)\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad a + (-a) = 0$

$P1)\quad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad , \quad a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

$P2)\quad \forall a,b \in \mathbb{R} \quad , \quad a\cdot b = b\cdot a$

$P3)\quad \forall a \in \mathbb{R} \, , \quad a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

$P4)\quad \forall a \in \mathbb{R},\, a \neq 0 \quad , \quad a\cdot a^{-1} = 1$

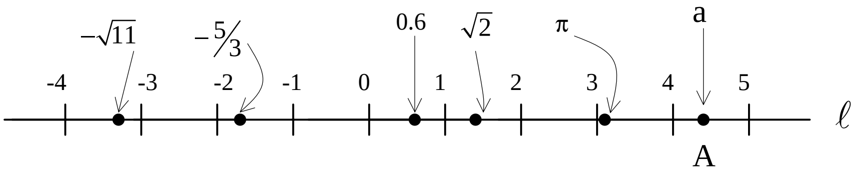
$D)\quad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad , \quad a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

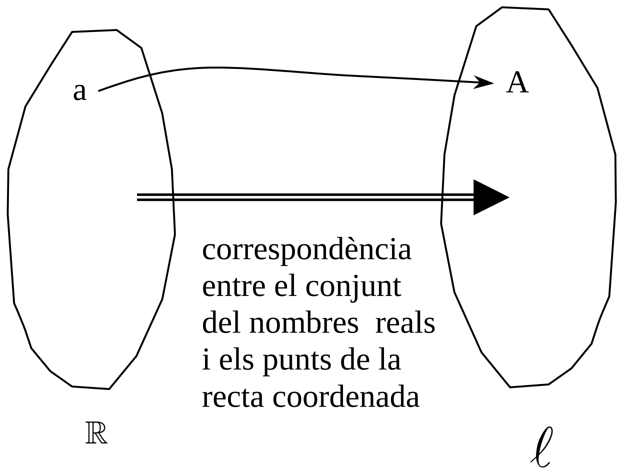
Podem associar el conjunt dels nombres reals amb el conjunt de punts sobre una recta ℓ , de forma que a cada nombre real li correspon un i sols un punt de la recta ℓ i , al contrari, a cada punt P de la recta ℓ li correspon exactament un nombre real.

A una associació tal entre dos conjunts s'anomena ***correspondència un a un***.

Al nombre $a \in \mathbb{R}$ associat al punt A de la recta ℓ se l'anomena ***coordenada d'A***.

Una assignació de coordenades als punts de la recta ℓ s'anomena un ***sistema coordenat*** per ℓ, i ℓ rep el nom ***de recta coordenada o recta real***.





Suposem dos nombres reals positius, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $b > 0$, si $a - b > 0$ llavors direm que $a > b$ (el nombre real *a* és més gran que el nombre real *b*).

Això defineix una relació d'ordre a $\mathbb{R}$ amb les següents propietats:

$$R1) \quad Si \quad a > b \quad i \quad b > c \quad , \quad llavors \quad a > c$$

$$R2) \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad si \quad c > 0$$

$$R3) \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad si \quad c > 0$$

$$R4) \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad si \quad c < 0$$

Si $a \in \mathbb{R}$ llavors *a* és la coordenada d'algun punt A sobre una recta coordenada ℓ i el símbol $|a|$ s'utilitza per indicar el nombre d'unitats (longitud) entre A i l'origen sense importar la direcció.

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases} \qquad VALOR\ ABSOLUT$$

Es pot demostrar que:

$$|a| = |-a|$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b$$
$$|a| > b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \quad o \quad a < -b$$
$$|a| = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad o \quad a = -b$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

DEFINICIÓ

Siguin a , b les coordenades de dos punts A i B sobre una recta coordenada ℓ .
La distància entre A i B, representada per *d(A,B)* ve donada per:

$$d(A,B) = |b - a|$$

Segons aquesta definició:

$$d(A,B) = d(B,A) \quad ja\ que \quad |b - a| = |a - b|$$
$$d(O,A) = |a - 0| = |a|$$

A matemàtiques tenen importància certs subconjunts de $\mathbb{R}$ anomenats ***intervals***.

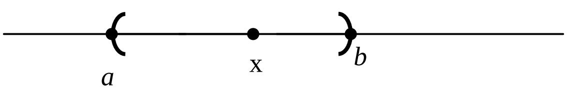
Donats $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$ el conjunt

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad ; \quad a \in [a,b] \,; \quad b \in [a,b]$$

es diu ***interval tancat*** d'extrems *a ,b*.

I al conjunt: $$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad ; \quad a \notin (a,b) \,; \quad b \notin (a,b)$$

es diu ***interval obert*** d'extrems *a ,b*.



en l'interval obert , ni *a* ni *b* són elements de l'interval.

Les successives ampliació dels conjunts numèrics fins arribar als nombres reals ens han servit per representar i interpretar diverses situacions que es plantegen a la vida quotidiana. Al mateix temps, ens han permès d'augmentar el camp d'acció de les diferents operacions i , com a conseqüència, ens han obert nous camins a l'hora de resoldre equacions.

Així, l'equació: $x + 4 = 1$

no té solució a $\mathbb{N}$, però sí en té en el conjunt $\mathbb{Z}$.

$$x + 4 = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 - 4 = -3 \in \mathbb{Z}$$

L'equació : $3x + 2 = -6$

no té solució a $\mathbb{Z}$, però sí en té en el conjunt $\mathbb{Q}$.

$$3x + 2 = -6 \quad \rightarrow \quad 3x = -6 - 2 = -8 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-8}{3} \in \mathbb{Q}$$

L'equació : $x^2 - 4x + 2 = 0$

no té solució a $\mathbb{Q}$, però sí en té en el conjunt $\mathbb{R}$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Podem fer més ampliacions, per resoldre equacions del tipus:

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$$

el nou conjunt que ens permet trobar les anteriors solucions s'anomena conjunt de ***nombres complexos***.

El conjunt de nombres complexos serà estudiat més endavant.

En l'estudi de les equacions anteriors hem utilitzat la lletra *x* com a representant d'un element determinat d'un conjunt numèric.

A les lletres que s'utilitzen per representar a un element arbitrari d'un conjunt donat sovint les anomenem ***variables***.

Per exemple si el conjunt és $\mathbb{R}$, una variable serà un nombre real.

El ***domini d'una variable*** és el conjunt de valors que pot tenir la variable.

Quan plantegem una equació el domini de la variable (aquells nombres que satisfan l'equació) és finit.

En una equació de primer grau la variable sols té un valor.
En una equació de segon grau la variable pot tenir fins a dos valors.
En una equació de tercer grau la variable pot tenir fins a tres valors.
...

Una inequació és una equació on la igualtat s'ha substituït per una desigualtat.

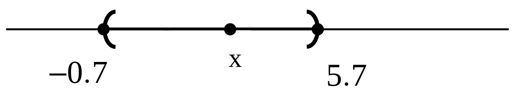
El domini de la variable *x* serà un interval (per tant compleixen la inequació infinits valors de la variable).

Sigui la inequació: $2x + 3 > 5 \quad \rightarrow \quad 2x > 5 - 3 \rightarrow \quad 2x > 2 \rightarrow \quad x > 1$

La resposta serà l'interval obert $(1, \infty)$.

Sigui la inequació: $x^2 - 3x < 2x + 4 \quad \rightarrow \quad x^2 - 5x - 4 < 0$

El domini de la variable *x* serà : $\left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2}, \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \right)$



La fórmula del binomi de newton

Es defineix el ***factorial*** d'un nombre natural, $n \in \mathbb{N}$, a un nombre natural que correspon a la següent operació:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemples:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Es defineix el nombre combinatori $\binom{m}{n}$ on $m, n \in \mathbb{N}$ com el nombre natural donat per l'operació:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \in \mathbb{N}$$

Exemple: $$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

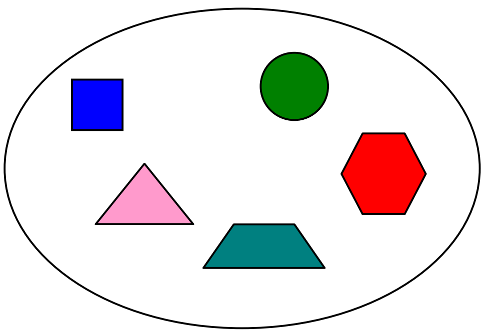
S´ha de tenir en compte que per definició 0!=1

Així obtenim: $\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$; $\binom{m}{1} = m$; $\binom{m}{m-1} = m$

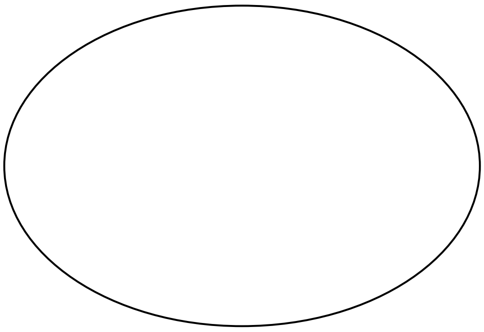
Ens adonem de que : $$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Un nombre combinatori representa el nombre de subconjunts de *n* elements que es poden fer en un conjunt de *m* elements.

Per exemple , suposem un conjunt amb 5 figures geomètriques:

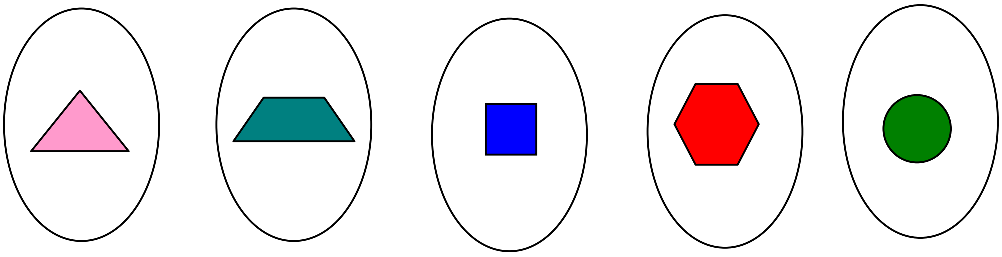


Sense cap element podem fer únicament un subconjunt, anomenat conjunt buit : $\varnothing$

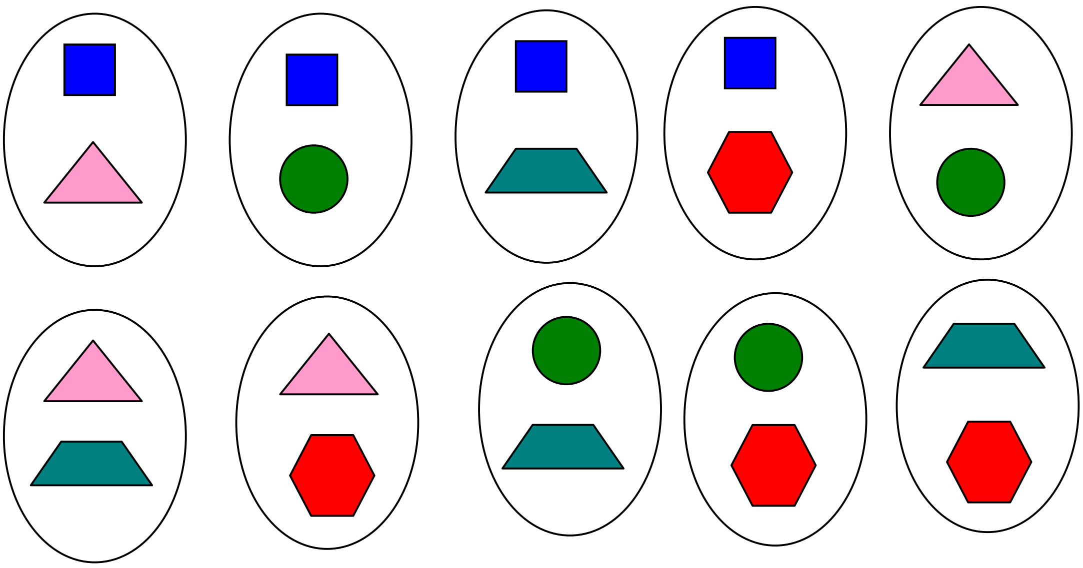


$$\binom{5}{0} = 1$$

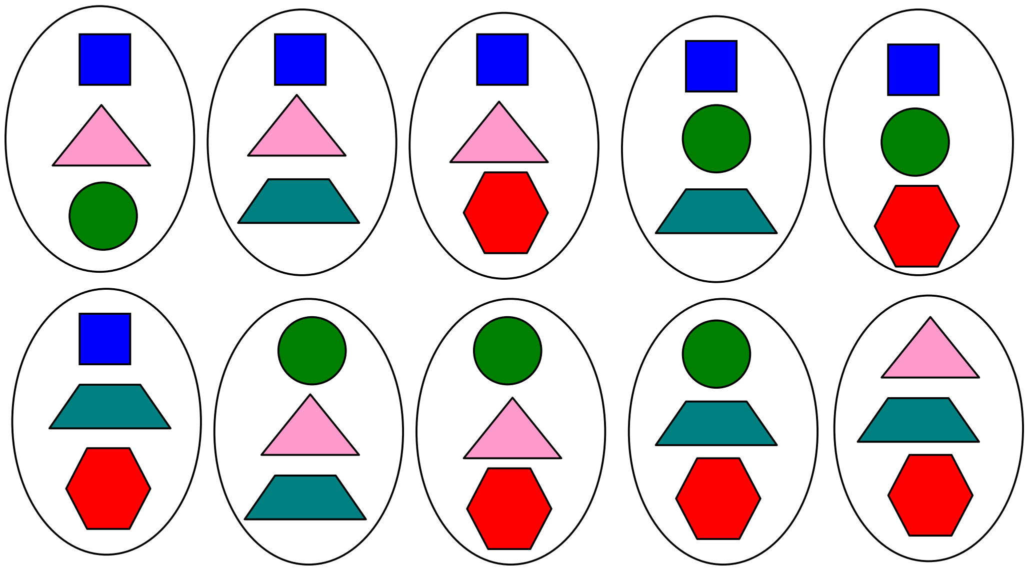
Amb un element podem fer 5 subconjunts diferents: $\binom{5}{1} = 5$



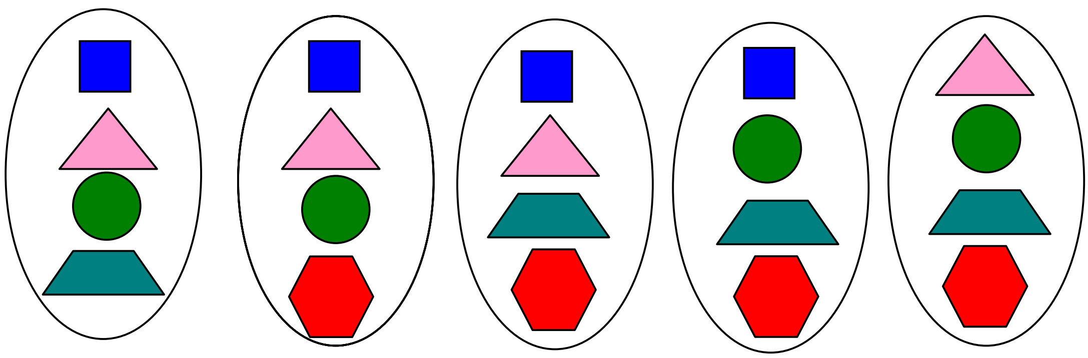
Amb dos elements podem fer 10 subconjunts diferents: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10$



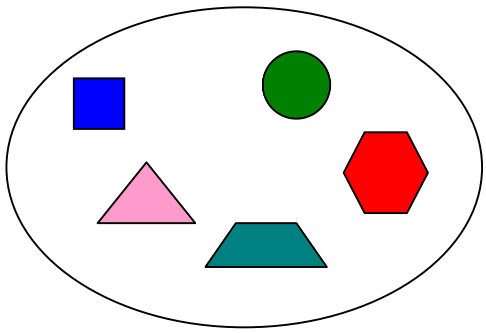
Subconjunts de 3 elements en podem fer 10 de diferents: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 10$



Subconjunts de 4 elements en podem fer 5 de diferents: $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$



Subconjunts de 5 elements en podem fer 1: $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!\cdot(5-5)!} = \frac{5!}{5!\cdot 0!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1} = 1$



Utilitzant els nombres combinatoris podem trobar una fórmula per calcular el desenvolupament de les potencies d'un binomi.

Siguin, $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, la fórmula del binomi de Newton és:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

Per exemple:

$$(x+2)^3 = \binom{3}{0} \cdot x^3 \cdot 2^0 + \binom{3}{1} \cdot x^2 \cdot 2^1 + \binom{3}{2} \cdot x^1 \cdot 2^2 + \binom{3}{3} \cdot x^0 \cdot 2^3$$

$$(x+2)^3 = 1 \cdot x^3 \cdot 1 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 8 = x^3 + 6x^2 + 12 \cdot x + 8$$

Polinomis

Donats els nombres reals $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ amb $a_n \neq 0$,
anomenem ***polinomi de grau n*** a l'expressió:

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n \qquad \text{on } x \text{ és una variable}$$

A $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ se'ls anomena ***coeficients*** del polinomi.
A $a_0 \in \mathbb{R}$ se'l coneix com ***terme independent***.

Per exemple l'expressió decimal d'un nombre natural es pot escriure com:

$$325 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

direm que aquesta és la seva **descomposició polinòmica**,

Els nombres reals també es poden descompondre polinòmicament:

$$45{,}196 = 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

L'expressió algebraica : $2x^3 + x^2 + 6x + 7$ pot ser la descomposició polinòmica d'un nombre sempre que $x = 10$.

Cadascun dels termes d'un polinomi s'anomena ***monomi***. $\qquad 2x^3$

Un polinomi format per dos monomis s'anomena ***binomi***. $\qquad 5x^4 - 8$

El valor numèric d'un polinomi *P(x)* per *x = a* és el nombre que resulta de substituir la *x* per *a* .

Exemple: $P(x) = x^2 - 3x + 5$ per $x = 2$ resulta: $P(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$

Al conjunt dels polinomis es defineixen les operacions suma i producte, que tenen les mateixes propietats que a $\mathbb{R}$, llevat de l'existència d'elements inversos.

Exemples:

a) Siguin dos polinomis : $A(x) = 4x^3 - 6x + 2$ *i* $B(x) = 2x^4 + 7x^2 + 2x - 5$

$$S(x) = A(x) + B(x) = \begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & & -6x & 2 \\ 2x^4 & & 7x^2 & 2x & -5 \\ \hline 2x^4 & 4x^3 & 7x^2 & -4x & -3 \end{array}$$

$$S(x) = 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 4x - 3$$

b) Siguin dos polinomis: $A(x) = x^2 - 3x + 1$ *i* $B(x) = 2x - 4$

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right) \cdot (2x - 4) = \begin{array}{rrrr} & x^2 & -3x & 1 \\ & & 2x & -4 \\ \hline & -4x^2 & 12x & -4 \\ 2x^3 & -6x^2 & 2x & \\ \hline 2x^3 & -10x^2 & +14x & -4 \end{array}$$

La divisió del polinomi *P(x)* entre el polinomi *D(x)* permet escriure el polinomi *P(x)* de la forma:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

on *Q(x)* és el polinomi quocient amb grau igual a la diferència entre els graus del polinomi *P(x)* i del polinomi *D(x)*

i *R(x)* s'anomena residu és de grau més petit que el grau del polinomi divisor *D(x)* .

Quan *R(x) = 0* es diu que la divisió és exacta i que hem descompost el polinomi *P(x)* en producte de dos factors *D(x)* i *Q(x)* .

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x)$$

Exemple: Siguin : $P(x) = 2x^5 - 3x + 1$ i $D(x) = 3x^2 - 6$

$$\begin{array}{l|l} 2x^5 \qquad -3x + 1 & 3x^2 - 6 \\ \hline \underline{-2x^5 + 4x^3} & \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x \\ 0 \; +4x^3 \; -3x + 1 & \\ \quad \underline{-4x^3 \; +8x \quad} & \\ \qquad 0 \; -5x + 1 & \end{array}$$

El resultat de la divisió dóna: $Q(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$ *i* $R(x) = 5x + 1$

Podem escriure : $2x^5 - 3x + 1 = \left(3x^2 - 6\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) + (5x + 1)$

En el cas de que el polinomi divisor *D(x)* sigui un binomi de la forma *(x - a)* , la divisió és més senzilla i es pot utilitzar l'anomenada ***regla de Ruffini***.

Suposem el polinomi: $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3$ que el volem dividir per binomi $D(x) = x + 2$

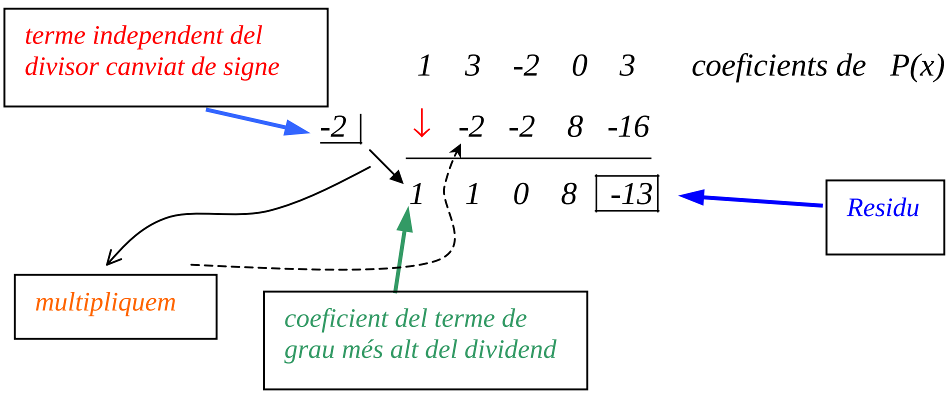
Si fem la divisió pel mètode anterior:

$$
\begin{array}{llll|l}
x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & +3 & x+2 \\ \cline{6-6}
\underline{-x^4} & \underline{-2x^3} & & & & x^3+x^2-4x+8 \\
 & x^3 & -2x^2 & & +3 & \\
 & \underline{-x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & -4x^2 & & +3 & \\
 & & \underline{4x^2} & \underline{+8x} & & \\
 & & & 8x & +3 & \\
 & & & \underline{-8x} & \underline{-16} & \\
 & & & & -13 &
\end{array}
$$

resulta : $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 8$ i $R(x) = -13$

Observem que el residu és de grau 0 , ja que ha de ser de grau inferior al grau del polinomi divisor *D(x)* que en aquest cas és de grau 1 .

La regla de Ruffini permet fer la divisió de manera senzilla:



El resultat de la divisió és un polinomi quocient representat pels coeficients: *1 , 1, -4 ,8* que representen al polinomi : $Q(x) = 1x^3 + 1x^2 - 4x + 8$ amb un residu de *–13* .

Teorema del Residu

El valor numèric d'un polinomi *P(x)* quan *x = a* coincideix amb el residu de la divisió del polinomi pel binomi *(x- a)* .

Per exemple volem saber el residu de la divisió del polinomi $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ pel binomi $D(x) = x - 2$

Aplicant la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & \downarrow & 4 & 0 & 10 \\ \hline & 2 & 0 & 5 & \boxed{9} \end{array}$$

Si substituïm x per 2 a P(x) obtenim: $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 16 - 16 + 10 - 1 = 9$

- ***Deduïm que un polinomi P(x) és divisible per (x – a) si i només si P(a) = 0***

- ***Direm que un nombre a és arrel del polinomi P(x) si el valor numèric d'aquest polinomi per x = a és zero.***

Per tant , trobar les arrels d'un polinomi equival a resoldre l'equació $P(x) = 0$

Quan els polinomis són de primer grau , té únicament una arrel , que és la solució de l'equació de primer grau que resulta d'igualar el polinomi a zero.

Exemple

$$P(x) = 3x - 12 \quad \text{si} \quad P(x) = 0 \quad ; \quad 3x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{3} = 4$$

direm que 4 és una arrel del polinomi P(x) ja que $P(4) = 3 \cdot 4 - 12 = 0$

Quan els polinomis són de grau dos , tenen dues arrels, que són la solució de l'equació de segon grau que resulta d'igualar el polinomi a zero.

Hem de fer constar que no tots els polinomis de segon grau tenen arrels reals.

Exemple

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{si}$$

$$P(x) = 0 \quad ; \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

direm que 2 i 3 són arrels del polinomi P(x) ja que

$$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \quad i \quad P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

El polinomi P(x) es pot expressar llavors com : $P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$

En aquestes condicions diem que s´ha descompost el polinomi en producte de dos binomis.

Exemple

$P(x) = x^2 - 5x + 8$ si

$$P(x) = 0 \quad ; \quad x^2 - 5x + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-32}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

No existeixen arrels reals del polinomi P(x)

Aquest polinomi no es pot descompondre el factors reals.

Quan el polinomi és de grau superior a dos s'aplica la regla de Ruffini provant per diversos nombres per intentar torbar alguna arrel .

Exemple $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Podem provar si els diversos divisors del terme independent són arrels del polinomi. Els divisors de (-2) són: -1 , 1, 2 , -2 .

$$P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$$
$$P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$$
$$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = 0$$
$$P(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - (2) - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12 \neq 0$$

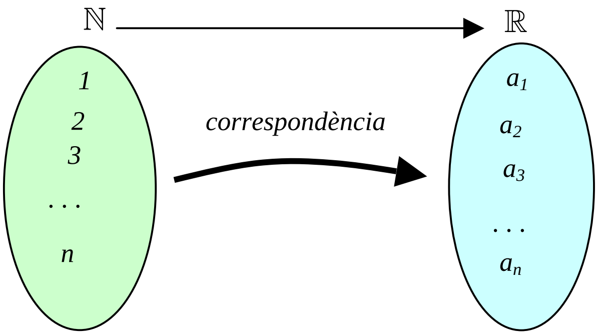
Observem que -1 , 1 i –2 són les tres arrels del polinomi P(x), per tant podem escriure:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$$

En general trobar les arrels d'un polinomi no és un tasca senzilla .

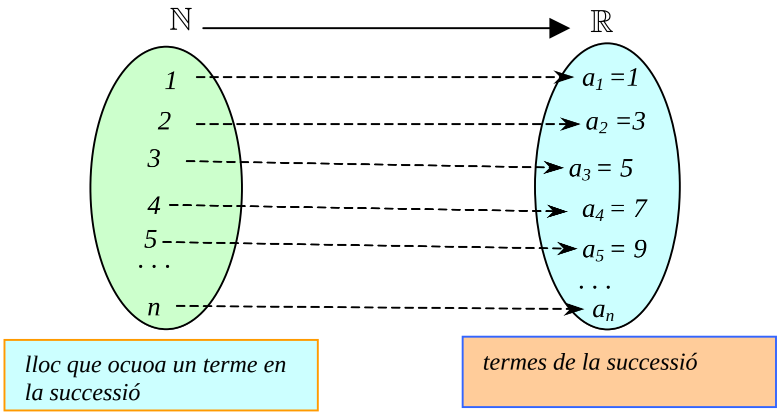
SUCCESSIONS

Una successió numèrica és una llista de nombres que es corresponen amb el conjunt de nombres naturals.



Representem una successió per : $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

Exemple: Sigui la successió : $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$



El valor del terme d'una successió depèn del lloc que ocupa.

L'expressió d'un terme d'una successió segons el lloc que ocupa és l'expressió del ***terme general*** , a_n , i permet calcular qualsevol terme.

Exemple: Sigui la successió : $1, 3, 5, 7, 9, \ldots,$ $\boldsymbol{a_n = 2n-1}$

expressió del terme general

$n=1$, $a_1 = 2\cdot1-1 = 1$, $a_2 = 2\cdot2-1=3$, $a_3 = 2\cdot3-1=5$, $a_4 = 2\cdot4-1=7$, . . .

Exemples : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n}$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{n+1}{n}$$

$$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \cdots \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{n^2}$$

No sempre és factible obtenir l'expressió del terme general.

Una successió és ***creixent*** si $a_{n+1} > a_n \quad \forall n,$ a partir d'un determinat terme.

Exemple : $a_n = n+1 \quad , \quad a_{n+1} = (n+1)+1 = n+2 > n+1 = a_n$

Una successió és ***decreixent*** si $a_{n+1} < a_n \quad \forall n,$ a partir d'un determinat terme.

Exemple : $a_n = \frac{1}{n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

Les successions creixents i les successions decreixents s'anomenen ***successions monòtones.***

Si en una successió tots els termes són més grans o iguals que un nombre *k*, direm que la successió té una ***cota inferior*** , *k*. La successió està ***acotada inferiorment***.

$$Si \quad a_n \geq k \quad \forall n \quad k \text{ és una cota inferior}$$

Qualsevol nombre més petit que *k* també serà una cota inferior de la successió.

Exemple : $a_n = n+1$ *l'1 és una cota inferior , també ho són el 0.9, 1.9, –0.5 ,...*

Si en una successió tots els termes són més petits o iguals que un nombre *K*, direm que la successió té una ***cota superior*** , *K*. La successió està ***acotada superiorment.***

$$Si \quad a_n \leq K \quad \forall n \quad K \text{ és una cota superior}$$

Qualsevol nombre més gran que *K* també serà una cota superior de la successió.

Exemple : $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ *el 2 és una cota superior , també ho són el 3, 10, 100 ,...*

LÍMIT D'UNA SUCCESSIÓ

El nombre ℓ és el límit d'una successió *{a_n}*, si la diferència entre un terme suficientment avançat de la successió i ℓ és tant petit com es vulgui.

$$Lim\{a_n\} = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \, |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Exemple: $a_n = \dfrac{n}{n+8}$, $\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{10}, \dfrac{3}{11}, \dfrac{4}{12}, \dfrac{5}{13}, \cdots, \dfrac{100}{108}, \cdots, \dfrac{1000}{1008}, \cdots, \dfrac{1000000}{1000008} \rightarrow 1$

Direm que $Lim\left\{\dfrac{n}{n+8}\right\} = 1$

ja que si escollim un petit valor ε, *per exemple,* $\varepsilon = 0.001$,
existeix un índex n tal que $\left|\dfrac{n}{n+8} - 1\right| < 0.001$

$$\left|\frac{n}{n+8} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+8} - \frac{n+8}{n+8}\right| = \left|\frac{n-n-8}{n+8}\right| = \left|\frac{-8}{n+8}\right| < 0.001$$

$$\frac{8}{n+8} < 0.001 \rightarrow \quad 8000 < n+8 \quad \rightarrow \quad n > 7992$$

Per tots els termes de la successió amb índex superior a 7992 la diferència amb 1 és inferior a una mil·lèsima.

Exemple: $a_n = \dfrac{2}{n}$, $2, 1, 0.\widehat{6}, 0.5, 0.4, \cdots, 0.02, \cdots, 0.00002, \cdots \rightarrow 0$

Direm que $Lim\left\{\dfrac{2}{n}\right\} = 0$

ja que si escollim un petit valor ε, *per exemple,* $\varepsilon = 0.001$,
existeix un índex n tal que $\left|\dfrac{2}{n} - 1\right| < 0.001$

$$\left|\frac{2}{n} - 0\right| = \left|\frac{2}{n}\right| < 0.001 \quad \rightarrow \frac{2}{n} < 0.001 \rightarrow \quad 2000 < n \quad \rightarrow \quad n > 2000$$

- Una successió amb límit finit, un nombre real, s'anomena ***successió convergent***.

Però, hi ha moltes successions sense límit finit,

Per exemple:

$$a_n = n^2 \quad , \quad 1, 4, 9, 16, 25, \cdots, 100, \cdots, 10000, \cdots, 1000000, \cdots \rightarrow \infty$$

Observem que en aquesta successió:

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|(n+1)^2 - n^2\right| = \left|n^2 + 2n + 1 - n^2\right| = 2n+1$$

És a dir la diferència entre un terme i el seu immediat anterior es fa cada cop més gran.

- Una successió com la de l'exemple anterior , sense límit finit, on cada cop la diferència entre un terme i l'immediat anterior es fa cada cop més gran, es diu que és una ***successió divergent.***

- Tota successió creixent acotada superiorment té límit. Aquest límit és , precisament, la més petita de les cotes superiors.

- Tota successió decreixent acotada inferiorment té límit. Aquest límit és, precisament, la més gran de les cotes inferiors.

- Tota successió creixent, no acotada superiorment és divergent i tendeix a infinit.

- Tota successió decreixent, no acotada inferiorment és divergent i tendeix a menys infinit.

CÀLCUL DE LÍMITS

Si l'expressió del terme general és un polinomi, el monomi de grau superior és el dominant i marca la tendència de la successió.

El límit d'una successió polinòmica serà $+\infty$ o $-\infty$ depenent del signe del coeficient del terme de grau superior.

Exemples:

$$a_n = n^3 - 2n^2 + 5n - 10 \quad \rightarrow \quad \infty \quad ; \quad Lim\{a_n\} = \infty$$
$$b_n = -2n^2 + 5n + 100 \quad \rightarrow \quad -\infty \quad ; \quad Lim\{b_n\} = -\infty$$

Quan l'expressió algebraica de la successió és més complicada s'aplicaran les propietats dels límits:

Si $Lim\{a_n\} = a \quad i \quad Lim\{b_n\} = b$

Resulta que:

$$Lim\{a_n + b_n\} = a + b$$

$$Lim\{a_n - b_n\} = a - b$$
$$Lim\{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b$$
$$Lim\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{a}{b} \quad , \quad b \neq 0$$

Si $Lim\{a_n\} = a \quad i \quad Lim\{b_n\} = 0$

Resulta que:

$$Lim\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \pm\infty$$

Si $Lim\{a_n\} = 0 \quad i \quad Lim\{b_n\} = 0$

Resulta que:

$$Lim\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{0}{0} \quad \text{no està determinat}$$

Si $Lim\{a_n\} = \infty \quad i \quad Lim\{b_n\} = \infty$

Resulta que:

$$Lim\{a_n + b_n\} = \infty$$
$$Lim\{a_n \cdot b_n\} = \infty$$
$$Lim\{k \cdot a_n\} = k \cdot Lim\{a_n\} = k \cdot \infty = \infty \quad , \; k \; > o$$
$$Lim\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{no està determinat}$$

Si $Lim\{a_n\} = \infty \quad i \quad Lim\{b_n\} = -\infty$

Resulta que:

$$Lim\{a_n + b_n\} \quad \text{no està determinat}$$

Els límits de les successions diferència i quocient de dues successions divergents no estan determinats.

- ***Si l'expressió del terme general és una fracció algebraica que té per numerador un nombre real i per denominador un polinomi de grau superior a zero, el límit és zero.***

Exemples:

$$Lim\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$$

$$Lim\left\{\frac{165}{n^2+3}\right\}=0$$

$$Lim\left\{\frac{-45}{n^3}\right\}=0$$

Si l'expressió del terme general és un quocient de polinomis ens trobem amb un cas d'indeterminació del tipus $\pm\frac{\infty}{\infty}$. La relació entre els graus del polinomi del numerador i el del denominador ens dona el caràcter de la successió.

- ***Quan el grau del numerador és més petit que el grau del denominador la successió tendeix a zero.***

Exemples:

$$Lim\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$$

$$Lim\left\{\frac{5n-7}{n^2+3}\right\}=0$$

$$Lim\left\{\frac{-45n^2+6n-9}{n^3+4n-5}\right\}=0$$

- ***Quan el grau del polinomi del numerador és més gran que el grau del polinomi del denominador la successió és divergent***

Exemples:

$$Lim\left\{\frac{n^2-3}{n}\right\}=\infty$$

$$Lim\left\{\frac{5n^4-7}{n^2+3}\right\}=\infty$$

$$Lim\left\{\frac{-4n^3+6n^2-2}{n^2+3n-8}\right\}=-\infty$$

- ***Quan el polinomi del numerador i el del denominador són del mateix grau, el límit és el quocient del coeficients dels termes de grau més gran dels dos polinomis***.

Exemples:

$$Lim\left\{\frac{2n^2-3}{n^2}\right\}=2$$

$$Lim\left\{\frac{5n^4-7}{6n^4+3}\right\}=\frac{5}{6}$$

$$Lim\left\{\frac{-4n^3+6n^2-2}{9n^3+3n-8}\right\}=-\frac{4}{9}$$

El límit de la diferencia de dues successions divergents és un cas d'indeterminació, ja que no es pot interpretar que $\infty-\infty$ sigui zero.

La solució serà intentar resoldre la indeterminació fent operacions.

Exemples:

a)

$$Lim\left\{\frac{n^2+1}{2n}-\frac{n^2}{4}\right\}=Lim\left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\}-Lim\left\{\frac{n^2}{4}\right\}=\infty-\infty$$

$$\frac{n^2+1}{2n}-\frac{n^2}{4}=\frac{2n^2+2}{4n}-\frac{n^3}{4n}=\frac{2n^2+2-n^3}{4n}$$

$$Lim\left\{\frac{n^2+1}{2n}-\frac{n^2}{4}\right\}=Lim\left\{\frac{2n^2+2-n^3}{4n}\right\}=-\infty$$

b)

$$Lim\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right\}=Lim\left\{\sqrt{n+1}\right\}-Lim\left\{\sqrt{n-1}\right\}=\infty-\infty$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$Lim\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right\}=Lim\left\{\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right\}=0$$

Sigui $\{a_n\}$ és una successió i k un nombre real.

Si $Lim\{a_n\}=a$ i $k>0$, llavors $Lim\{k^{a_n}\}=k^a$
Si $Lim\{a_n\}=+\infty$ i $k>1$, llavors $Lim\{k^{a_n}\}=+\infty$
$Lim\{a_n\}=+\infty$ i $0<k<1$, llavors $Lim\{k^{a_n}\}=0$

Siguin dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ convergents

Si $Lim\{a_n\}=a$ i $Lim\{b_n\}=b$, llavors $Lim\{a_n{}^{b_n}\}=a^b$
Si $Lim\{a_n\}=1$ i $Lim\{b_n\}=\infty$, llavors $Lim\{a_n{}^{b_n}\}=1^\infty$ no està determinat
Si $Lim\{a_n\}=\infty$ i $Lim\{b_n\}=0$, llavors $Lim\{a_n{}^{b_n}\}=\infty^0$ no està determinat

Exemples:

a)

$$Lim\{2^n\}=\infty \quad ; \quad 2,4,8,16,32,64,128,256,\cdots, \quad \to \quad \infty$$

$$Lim\{0.3^n\}=0 \quad ; \quad 0.3,0.09,0.027,0.0081,\cdots, \quad \to \quad 0$$

b)

$$Lim\left\{3^{\left(\frac{n-3}{2n+7}\right)}\right\}=3^{Lim\left(\frac{n-3}{2n+7}\right)}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

c)

$$Lim\left\{\left(\frac{2n-2}{n+3}\right)^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right\}=\left[Lim\left(\frac{2n-2}{n+3}\right)\right]^{Lim\left(\frac{n}{n+1}\right)}=2^1=2$$

d)

$$Lim\left\{\left(\frac{n}{n+5}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right\}=\left[Lim\left(\frac{n}{n+5}\right)\right]^{Lim\left(\frac{1}{n}\right)}=1^0 \quad \textit{no està determinat}$$

El nombre e

Considerem la successió : $\{a_n\}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad ; \quad 2,2.25,2.37,2.441,2.48832,\cdots$

El seu límit és del tipus 1^∞ :

$$Lim\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=\left[Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{Lim(n)}=1^\infty$$

Segon es veu donant-li valors a n , que aquesta successió és creixent però cada cop la diferència entre un terme i el següent és cada cop més petita.

Aquesta successió , per tant, està acotada superiorment.

Si donem valors alts a *n*, per exemple :

$$a_{100000} = 2.718268$$
$$a_{1000000} = 2.718280469$$
$$a_{1000000000} = 2.718281827$$

Es veu que el nombre al que s'acosten els termes de la successió no és periòdic i per tant no és un nombre racional.

Podem dir que $Lim\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ és un nombre irracional al que anomenem nombre ***e***

$$\boxed{Lim\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = e}$$

Quan el límit d'una successió és de la forma 1^∞, es resol amb l'ajut del nombre ***e*** **.**

Exemple:

$$Lim\left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right\} = 1^\infty$$

$$\frac{n+2}{n+1} = 1-1+\frac{n+2}{n+1} = 1-\frac{n+1}{n+1}+\frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}} = \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$Lim\left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right\} = Lim\left\{\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right]^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right\} = Lim\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right]^{Lim\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^1 = e$$