

# TEMA 1 .- ELS NOMBRES REALS

1.1.- En cada cas substituïu la coma entre cada parell de nombres reals pel símbol:  
 $>$ ,  $<$ ,  $=$  .

- a)  $-2, 5$
- b)  $\frac{2}{3}, 0.66$
- c)  $-8, -3$
- d)  $\sqrt{2}, 1.41$
- e)  $\pi, \frac{22}{7}$

1.2.- Si A, B, C i D tenen coordenades  $-5$ ,  $-3$ ,  $1$  i  $6$  respectivament. Determineu:

- a)  $d(A, B)$
- b)  $d(C, B)$
- c)  $d(C, D)$

1.3.- Resol les desigualtats següents:

- a)  $5x - 6 > 11$
- b)  $7 - 2x \geq -3$
- c)  $\frac{5}{7 - 2x} > 0$
- d)  $|2x + 1| > 5$
- e)  $2x^2 - 9x + 7 < 0$
- f)  $x^2 - 10x \leq 200$
- g)  $\frac{3x + 2}{2x - 7} \leq 0$

1.4.- Calculeu els següents nombres combinatoris

- a)  $\binom{3}{1}$
- b)  $\binom{8}{5}$
- c)  $\binom{6}{4}$

1.5.- Desenvolpeu les següents potències:

- a)  $(x + 3)^3$
- b)  $(2a - 3b)^5$
- c)  $(x^2 + 2x)^6$
- d)  $(3 - y)^4$

1.6.- Determineu el valor numèric dels polinomis següents:

- a)  $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 5$  per  $x = 2$
- b)  $R(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 10$  per  $x = 1$

1.7.- Donats els polinomis:

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

$$B(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

$$C(x) = 2x^2 - 4x$$

Calculeu:

- a)  $A(x) + B(x)$
- b)  $A(x) - C(x)$
- c)  $B(x) - C(x)$
- d)  $3A(x) + 2B(x) - 4C(x)$
- e)  $[C(x)]^3$

1.8.- Efectua les divisions següents, aplicant la regla de Ruffini sempre que sigui possible:

- a)  $(3x^4 - x^3 + 1) \div (x^2 + 1)$
- b)  $x^6 \div (x^4 + x^2 - 2)$
- c)  $(2x^3 - x^2 + 3x) \div (x - 1)$
- d)  $(x^4 - 1) \div (x + 1)$

1.9.- Determineu el valor de  $k$  per tal que la divisió següent:

$$(x^3 - 3x^2 + 5x + k) \div (x + 3) \text{ sigui exacta.}$$

1.10.- Sabent que el polinomi  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  és divisible per  $D(x) = (x + 2)$ , expresseu el polinomi  $P(x)$  com a producte de dos polinomis.

1.11.- Determina les arrels enteres d'aquests polinomis:

a)  $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

b)  $B(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

c)  $C(x) = 2x^3 + 2$

d)  $D(x) = x^4 + x^2 - 2$

1.12.- Determineu les arrels del polinomi :  $P(x) = (x^2 - 9) \cdot (2x - 1)$

1.13.- Determina si els parells de fraccions següents són equivalents:

a)  $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10}$  ;  $\frac{x - 5}{x + 2}$

b)  $\frac{1}{x + 1}$  ;  $\frac{x - 1}{x^2 - 1}$

1.14.- Calculeu:

a)  $\frac{2x - 1}{x + 2} + \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2 - x}{x - 1}$

b)  $\left(\frac{1 - x^2}{x^2 - x}\right) \cdot \left(\frac{3x}{x - 1}\right)$

c)  $\frac{3}{x - 1} + \frac{5x}{x + 1} + \frac{2x}{x^2 - 1}$

d)  $2 - \frac{3x}{x + 1}$

e)  $\left(\frac{x^2 - 4}{3x}\right) \div \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}\right)$

1.15.- Intenteu escriure el terme general de les següents successions:

a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

b)  $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \frac{16}{13}, \frac{25}{16}, \frac{36}{19}, \dots$

c) 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

d) -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, ...

1.16.- Representeu els 10 primers termes de les successions:

- a)  $a_n = \frac{2n}{n+1}$
- b)  $b_n = (n-2)^2$
- c)  $c_n = 3(n+2)$
- d)  $d_n = 2n-1$
- e)  $e_n = \frac{4n-3}{2n}$
- f)  $f_n = 2^n$

1.17.- Per les següents successions:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad ; \quad b_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad ; \quad c_n = \frac{2n}{n-1} \quad ; \quad d_n = n^2-100$$

calculeu els termes  $n = 100$  ;  $n = 1000$  ;  $n = 10000$  ;  $n = 100000$  ;  $n = 1000000$

i deduiu quin és el límit de cadascuna d'elles.

1.18.- Calculeu alguns termes de la successió:  $a_n = (-2)^{n-1}$

Té límit aquesta successió ? .

1.19.- Calculeu el límits de les successions:

- a)  $a_n = \frac{2n+1}{n}$
- b)  $b_n = \frac{1}{n^2}$
- c)  $c_n = \frac{3^n}{150}$
- d)  $d_n = n^2 - n - n^3$
- e)  $e_n = \frac{1 + \sqrt{n}}{n}$
- f)  $f_n = \frac{2n}{-n+5}$
- g)  $g_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{5n}$

## TEMA 2 .- FUNCIONS

2.1.- Trobar el domini de les següents funcions:

a)  $f(x) = 3x - 2$

b)  $g(x) = \frac{2x - 6}{x - 4}$

c)  $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 7x + 12}$

d)  $i(x) = \sqrt{x + 3}$

e)  $j(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{(x - 2)(x + 3)}$

f)  $k(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$

g)  $l(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{16 - x^2}}$

2.2 .- Siguin les funcions:  $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$  i  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{3x}$

Trobeu les funcions:

a)  $f + g$

b)  $f \cdot g$

c)  $\frac{f}{g}$

d)  $f \circ f$

e)  $f \circ g$

f)  $g \circ f$

g)  $f^{-1}$

2.3 .- Trobeu el domini de totes les funcions anteriors

2.4 .- Sigui la funció :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x < -1 \\ \frac{x^2 + 1}{x - 2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x + 3} & x > 1 \end{cases}$$

Calculeu:  $f(-3)$  ;  $f(-1)$  ;  $f(0)$  ;  $f(1)$  ;  $f(6)$

2.5 .- Donada la funció :  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  , determineu la funció composta  $(f \circ f)(x)$  .

2.6 .- Determineu les funcions inverses de les següents funcions:

a)  $f(x) = 4x - 7$

b)  $g(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$

c)  $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

2.7 .- Determineu el signe de les raons trigonomètriques dels angles següents:

a)  $135^\circ$

b)  $\frac{7\pi}{6}$

c)  $300^\circ$

2.8 .- En una circumferència trigonomètrica dibuixa tots els angles, tals que:

a)  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$

b)  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\tan \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d)  $\sin \delta = -1$

e)  $\tan \varepsilon = 1$

2.9.- Un angle  $\alpha$  del segon quadrant és tal que  $\cos \alpha = \frac{-4}{5}$  .

Determineu:  $\sin \alpha$  i  $\tan \alpha$  .

2.10 .- Un angle té una  $\tan \alpha = 3$  . Determineu  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$

2.11 .- Representa tots els angles menors de  $360^\circ$  tals que  $\sin \alpha = -0.5$

2.12.- Sigui un angle  $\alpha$  tal que:  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  i  $\sin \alpha = -0.6$  . Determina les altres 6 raons trigonomètriques.

2.13 .- Considerem un angle  $\alpha$  tal que  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$  i  $\tan \alpha = -1$  . Trobeu les altres raons trigonomètriques .

2.14.- Dibuixa un angle tal que la seva tangent sigui  $-2$  . Quants angles hi han d'aquestes característiques menors de  $2\pi$  rad ? .

2.15 .- Trobeu una expressió de  $\cos 3\alpha$  en funció de  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$  .

- 2.16.- Determineu les raons trigonomètriques d'un angle de  $75^\circ$  sense utilitzar la calculadora, sabent que :  $\sin 30^\circ = 0.5$  i  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 2.17.- Determineu el valor de les raons trigonomètriques d'un angle de  $15^\circ$ .
- 2.18.- En un triangle rectangle un angle agut fa  $35^\circ$  i un catet 6 cm . Troba la longitud dels altres costats.
- 2.19 .- En un triangle  $a = 5$  cm ,  $b = 8$  cm i  $\alpha = 35.5^\circ$ . Determina la longitud del costat que falta i el valors dels altres dos angles.
- 2.20.- Determina l'àrea d'un triangle  $a = 24$  cm ,  $b = 15$  cm i  $\alpha = 125^\circ$ .
- 2.21.- Dos motoristes surten d'una bifurcació de dues carreteres sense corbes i que formen un angle de  $55^\circ$ . La velocitat dels motoristes és de 90 km/h i 120 km/h. Determineu la distància que els separarà després de 3 minuts.
- 2.22.- Un arbre es veu sota un angle de  $36^\circ$  , i si ens acostem 35 m, es veu sota un angle de  $44^\circ$ . Determineu l'alçaria de l'arbre.
- 2.23 .- Determineu la superfície d'un polígon regular de 15 costats si cada costat fa 2 cm .
- 2.24 .- Un radar d'un vaixell detecta un objecte en direcció Est a 8 km de distància i un altre en direcció Nord-Oest a 6 km. Quina és la distància entre els dos objectes.
- 2.25.- Per assegurar un pal a terra se'l subjecta amb dos cables a dos punts separats 20 m. Els cables formen amb el terra angles de  $75^\circ$  i  $60^\circ$  . Trobeu l'alçaria del pal.
- 2.26 .- Una torre de comunicacions es troba situada sobre una muntanya. Des del pla s'observa l'extrem de l'antena baix un angle de  $60^\circ$ . Si caminant sobre el pla ens acostem a la torre una distància de 13 m el mateix punt es veu sota un angle de  $68^\circ$ . Des d'aquest mateix punt si observem la base de la torre es veu sota un angle de  $57^\circ$  . determineu l'alçaria de la torre.
- 2.27 .- Les diagonals d'un paral·lelogram fan 20 cm i 12 cm respectivament i es tallen en un angle de  $62^\circ$ . Determineu la longitud dels costats del paral·lelogram.
- 2.28.- Resol les equacions trigonomètriques següents:

a)  $\sin x + \cos^2 x = \frac{5}{4}$

b)  $2 \sin^2 x - \tan x = 0$

c)  $\cos x = 1 - \sin x$

d)  $6 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

e)  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.29.- Demostrea la igualtat :  $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$

2.30.- Resol l'equació :  $\tan x = 2 \cdot \sin x$  en l'interval  $[0, \pi]$ .

2.31.- Trobeu l'exponent  $x$  :

a)  $2^x = \frac{1}{8}$

b)  $10^x = 0.000001$

c)  $e^x = \sqrt[5]{e}$

2.32.- Per la funció  $f(x) = 2^x$ , trobeu les anteimatges de :  $x = 1/16$  ;  $0.125$  ;  $512$  ;  $\sqrt[5]{8}$ .

2.33.- Resol les equacions:

a)  $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 64$

b)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{-x+3} = 32^{3x-2}$

c)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

d)  $5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^x = \frac{151}{25}$

2.34.- Calcula:

a)  $\log_7 49$

b)  $\log_3 729$

c)  $\log_9 \frac{1}{9}$

d)  $\log_{11} \sqrt[3]{121}$

e)  $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[7]{216}$

2.35.- Trobeu  $x$  en cadascuna de les expressions:

a)  $\log_3 x = -1$

b)  $\log_x \frac{1}{25} = -2$

c)  $\log x = \frac{1}{2}$

d)  $\log_{\sqrt{7}} x = -2$

e)  $\ln x = \frac{-2}{3}$



2.36.- Si  $\log 3 = m$ , escriu en funció de  $m$ :

- a)  $\log 8100$
- b)  $\log \sqrt{3000}$
- c)  $\log \sqrt[3]{0.027}$
- d)  $\log \frac{10}{81}$
- e)  $\log 0.3$

2.37.- Resol les equacions:

a)  $\log_2 x^2 - \log_2 \left( x - \frac{3}{4} \right) = 2$

b)  $2[1 - \log(2x + 3)] = 4 \cdot \log \sqrt{5x - 3}$

c)  $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$

d)  $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 2 \log y = -1 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 2 \log y - 3 \log x = 1 \\ \log(x \cdot y) = 3 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} \log_x(y - 18) = 2 \\ \log_y(x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$

# TEMA 3 . LÍMITS I DERIVADES

3.1.- Utilitzant la definició de derivada calculeu la derivada de les següents funcions

a)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

b)  $f(x) = x^n$

c)  $f(x) = \sin x$

d)  $f(x) = \cos x$

e)  $f(x) = \tan x$

f)  $f(x) = \exp x$

g)  $f(x) = a^x$

3.2 .- Exercicis de derivació a partir de les regles de derivades

1.  $f(x) = \sin x^2$

2.  $f(x) = (\ln x)^2$

3.  $f(x) = \sin [(\ln x)^3]$

4.  $f(x) = \exp \{ \sqrt{x^2 + 1} \}$

5.  $f(x) = xe^x$

6.  $f(x) = x^2 e^x$

7.  $f(x) = x^2 e^{2x}$

8.  $f(x) = \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}$

9.  $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

10.  $f(x) = (\sin x)^{x^2}$

11.  $f(x) = x^x$

12.  $f(x) = \frac{(5x - 4)^3}{\sqrt{2x + 1}}$

13.  $f(x) = e^{ax} x^2$

14.  $f(x) = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$

15.  $f(x) = \frac{x^p}{x^m - a^m}$

16.  $f(x) = \sin^2 x$

17.  $f(x) = \tan(ax + b)$

18.  $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

19.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

20.  $f(x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$

21.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

22.  $f(x) = \ln[\ln x]$

23.  $f(x) = a^{\ln x}$

24.  $f(x) = \exp \{ \sin x \}$

25.  $f(x) = \left( \frac{x}{n} \right)^{nx}$

# TEMA 4 .- MATRIUS I DETERMINANTS

4.1 Donades les següents matrius calculeu  $3A + 2B$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2 Utilitzant les definicions de suma i producte per un escalar, determineu  $X$  i  $Y$  que compleixen la condició

$$\left. \begin{aligned} 2X + 3Y &= A \\ -X - Y &= B \end{aligned} \right\}$$

amb  $A$  i  $B$  les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 Donades les matrius següents

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Demostreu:

- $AB = BA = 0$ ;  $AC = A$ ;  $CA = C$
- $ACB = CBA$ ;  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

4.4 Calculeu  $A^2$  i  $A^{-1}$  de la següent matriu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4.5 Es considerem les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Trobeu  $A \cdot B$  i interpreteu el resultat. Feu el mateix quan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

4.6 Donada la matriu diagonal  $D$ , trobeu  $D^n$ .

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

4.7 Determineu el valor de  $x, y, z, t$  perquè es compleixi:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.8 Donada la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , proveu que la matriu  $A^3$  és la matriu nul·la.

4.9.- Calculeu el valor dels determinants següents:

a)  $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

d)  $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 28 & 32 \end{vmatrix}$

e)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

f)  $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{h)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$