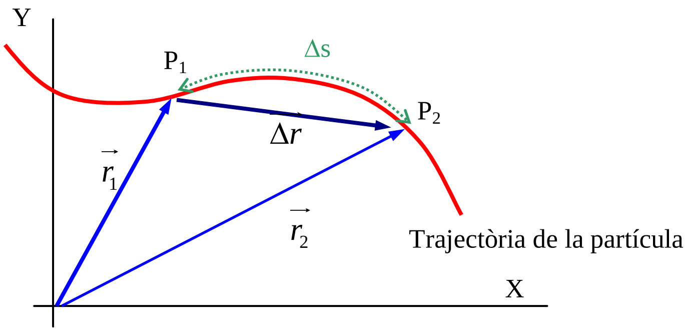
VECTOR VELOCITAT

Suposem una partícula que es mou al llarg d'una trajectòria curvilínia en el pla. (La corba representa el camí físic seguit per la partícula)

VECTOR DE POSICIÓ



Definirem la posició en cada instant de la partícula pel seu ***vector de posició*** $\vec{r}$ respecte de l'origen del pla coordenat (sistema de referència respecte del qual estudiem el moviment)
Aquest vector de posició varia en el temps , dependrà del temps (serà una funció de t), $\overrightarrow{r(t)}$, ja que la partícula s'està movent en el pla.
Per qualsevol posició de la partícula mòbil les components horitzontal i vertical del vector de posició les podrem escriure com *x(t)* i *y(t).*

Llavors el vector de posició s'escriu com: $\overrightarrow{r(t)} = x(t)\cdot\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j}$

Entre dos instant t_1 i t_2 , la posició de la partícula passa del punt P_1 identificat pel vector de posició $\overrightarrow{r_1(t)} = x_1(t)\cdot\hat{i} + y_1(t)\cdot\hat{j}$, al punt P_2 identificat pel vector de posició $\overrightarrow{r_2(t)} = x_2(t)\cdot\hat{i} + y_2(t)\cdot\hat{j}$

VECTOR DESPLAÇAMENT

Anomenem ***vector desplaçament*** al vector que va des de P_1 a P_2:

$$\overrightarrow{\Delta r}(t) = \overrightarrow{r_2(t)} - \overrightarrow{r_1(t)}$$

el vector desplaçament és la variació del vector de posició.

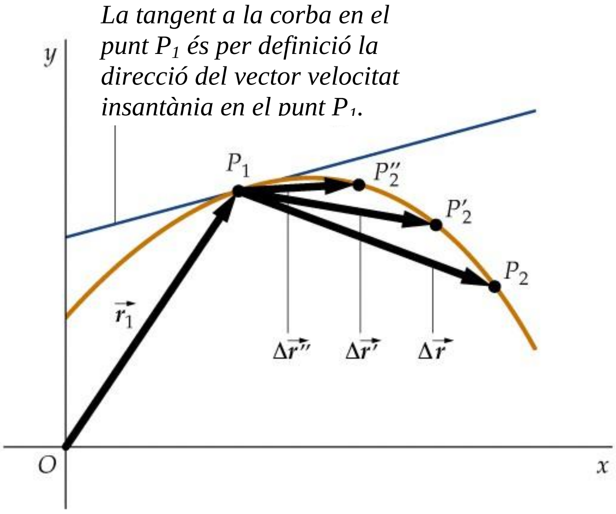
VECTOR VELOCITAT MITJANA

Definirem ***velocitat mitjana*** el quocient entre el vector desplaçament i l'interval de temps $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Podem observar en la figura anterior que el mòdul (longitud) del vector desplaçament no és igual a al distància recorreguda Δs mesurada al llarg de la corba.

Si considerem intervals de temps cada cop més petits el mòdul del vector desplaçament tendeix a la distància recorreguda per la partícula al llarg de la corba, i la direcció del vector $\overrightarrow{\Delta r}$ tendeix a la direcció de la recta tangent a la corba en el punt P.



VECTOR VELOCITAT INSTANTÀNIA

Podem definir ***velocitat instantània*** com el límit de la velocitat mitjana quan l'interval de temps tendeix a zero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

El ***vector velocitat instantània*** és la derivada del vector de posició respecte del temps:

- ***La seva direcció és la de la línia tangent a la corba que descriu la partícula en l'espai.***
- ***El seu mòdul és igual a:*** $v = \dfrac{ds}{dt}$ ***, on s indica distàncies mesurades sobre la corba.***

Si expressem aquestes magnituds en forma de vectors en el pla, tindrem:

Vector desplaçament:

$$\overrightarrow{\Delta r}(t) = \overrightarrow{r_2(t)} - \overrightarrow{r_1(t)} = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j}\right) = \left(x_2 - x_1\right)\hat{i} + \left(y_2 - y_1\right)\hat{j} = \Delta x \cdot \hat{i} + \Delta y \cdot \hat{j}$$

Velocitat mitjana: $\overrightarrow{v_m} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$

Velocitat instantània: $\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j}$

Exemple:
Un veler té com a coordenades inicials $(x_1, y_1)=(100, 200)$ m . Dos minuts més tard és a les coordenades $(x_2, y_2)=(120, 210)$ m.
Determineu les coordenades de la seva velocitat mitjana en aquest interval.

$$\overrightarrow{\Delta r}(t) = \left(120\hat{i} + 210\hat{j}\right) - \left(100\hat{i} + 200\hat{j}\right) = 20\hat{i} + 10\hat{j}$$

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{20}{120}\hat{i} + \frac{10}{120}\hat{j} = \frac{1}{6}\hat{i} + \frac{1}{12}\hat{j} \quad \left({}^{m}\!/\!_{s} \right)$$

Si volem saber el mòdul d'aquesta velocitat mitjana:

$$v_m = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{4}} = 0.186 \quad \left({}^{m}\!/\!_{s} \right)$$

i la direcció: $\theta = arctg \frac{1/12}{1/6} = arctg \frac{1}{2} = 26.6^{\circ}$

EL VECTOR ACCELERACIÓ

Suposem conegut en cada instant el vector velocitat instantània d'una partícula que es mou en el pla.

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

Aquest vector velocitat instantània pot canviar tant en mòdul com en direcció al llarg de la trajectòria , ja que tant $v_x(t)$ com $v_y(t)$ poden ser funcions del temps.

- Mòdul: $v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$
- Direcció: $\theta(t) = arctg \frac{v_y(t)}{v_x(t)}$

VECTOR ACCELERACIÓ MITJANA

Definim el vector acceleració mitjana com el quocient entre el canvi de la velocitat instantània $\overrightarrow{\Delta v}$ i l'interval de temps □t:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

VECTOR ACCELERACIÓ INSTANTÀNIA

Definim el ***vector acceleració instantània*** com:

Si $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ llavors $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

És important adonar-se que pot canviar el mòdul o la direcció del vector velocitat, o totes dues coses a la vegada, i en aquest cas la partícula està accelerada.
Encara que el mòdul del vector velocitat sigui constant pot haver acceleració, ja que pot estar canviant la direcció del vector velocitat. Es a dir, qualsevol canvi del vector velocitat dóna lloc a l'existència d'acceleració.

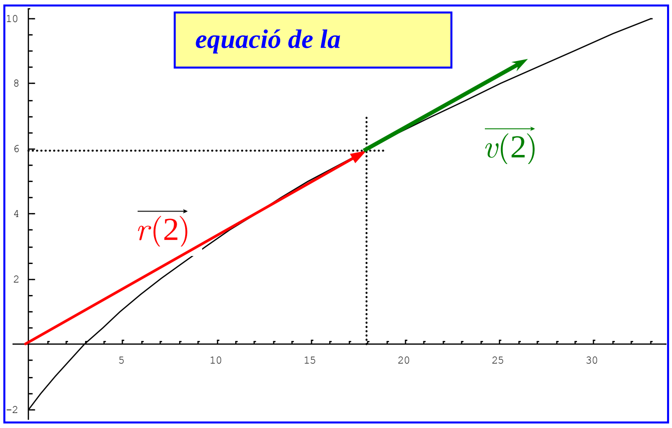
Exemple

Suposem que el vector de posició d'una partícula mòbil ve donat per:

$$\overrightarrow{r(t)} = \left(2t^2 + 5t\right)\hat{i} + \left(4t - 2\right)\hat{j}$$

Determineu la velocitat instantània per *t = 2 s*.

$$\overrightarrow{v(t)} = \left(\frac{dr_x}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{dr_y}{dt}\right)\hat{j} = \left(\frac{d(2t^2+5t)}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{d\left(4t-2\right)}{dt}\right)\hat{j} = \left(4t+5\right)\hat{i} + \left(4\right)\hat{j}$$



Per *t = 2 s* , $\overrightarrow{v(2)} = 13\hat{i} + 4\hat{j}$

Aquest vector té per mòdul: $\left|\overrightarrow{v(2)}\right| = \sqrt{13^2 + 4^2} = 13.6\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$

i direcció: $\theta = arctg\,\dfrac{4}{13} = 17.1^{o}$

Com que el mòdul i la direcció del vector velocitat depenen del temps , ambdues quantitats aniran canviant.

Ara volem determinar l'acceleració de la partícula en l'instant t =1 s.

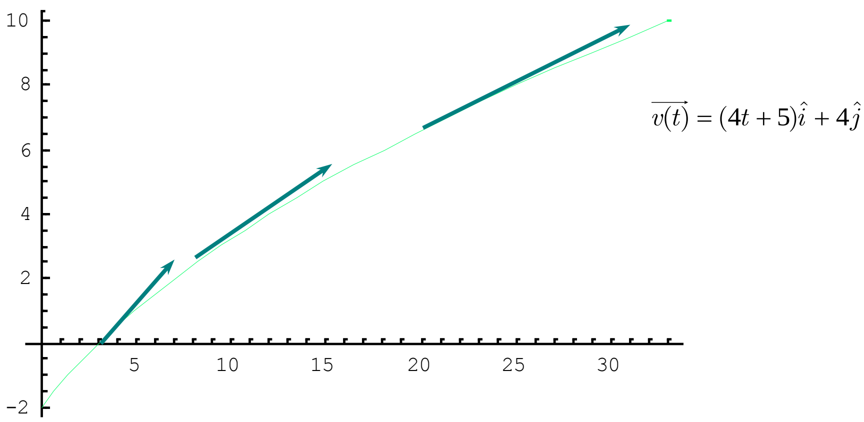
$$\overrightarrow{a(t)} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\hat{j} = \left(\frac{d(4t+5)}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{d(4)}{dt}\right)\hat{j} = \left(4\right)\hat{i} + \left(0\right)\hat{j} = 4\hat{i}$$

Per t=1 s , $\overrightarrow{a(1)} = 4\hat{i}$ ja que l'acceleració no depèn del temps.

Aquest vector té per mòdul: a = 4 m/s^2

i direcció ϕ= 0°

Si observem la trajectòria de la partícula el vector velocitat , que és tangent a cada punt a la trajectòria, varia en cada instant.

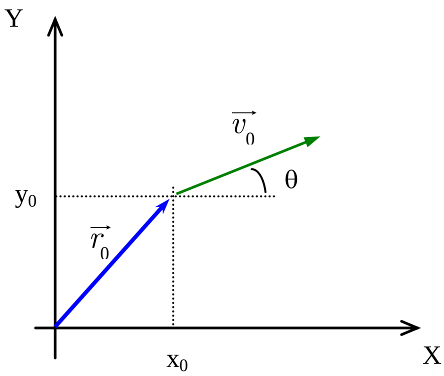


TRET PARABÒLIC

Suposem que es vol llençar una partícula en una direcció que forma un angle q amb l'horitzontal. Si considerem que $\vec{r_0} = \left\langle x_0, y_0 \right\rangle$ indica la posició de llançament (posició inicial) i que v_0 és el mòdul de la velocitat inicial, volem saber :

- *vector de posició de la partícula en funció del temps*
- *vector velocitat instantània*
- *vector acceleració*

Considerem un sistema de referència {X,Y} amb X positiu cap a la dreta i Y positiu cap amunt.



Les components de la velocitat inicial són:

$$\vec{v_0} = \left\langle v_{x_0}, v_{y_0} \right\rangle = \left\langle v_0 \cdot \cos\theta, v_0 \cdot \sin\theta \right\rangle$$

Si suposem que la resistència de l'aire al moviment és menyspreable, l'única acceleració que actuarà sobre la partícula serà l'acceleració de la gravetat, de mòdul igual a g i direcció vertical i cap avall:

$\vec{a}$

Com observem en direcció horitzontal no actua cap acceleració i per tant, podem considerar com un moviment rectilini uniforme amb velocitat $v_0 \cdot \cos\,\theta$, i en direcció vertical actua una acceleració constant ($-g$) i per tant és un moviment rectilini uniformement accelerat, on la velocitat anirà canviant en el temps segons $v_0 \cdot \sin\,\theta\,-g \cdot t$.

$$\vec{v} = \left\langle v_0 \cdot \cos\theta, v_0 \cdot \sin\theta - g \cdot t \right\rangle$$

Observem que v_x no depèn de v_y i tampoc v_y depèn de v_x .

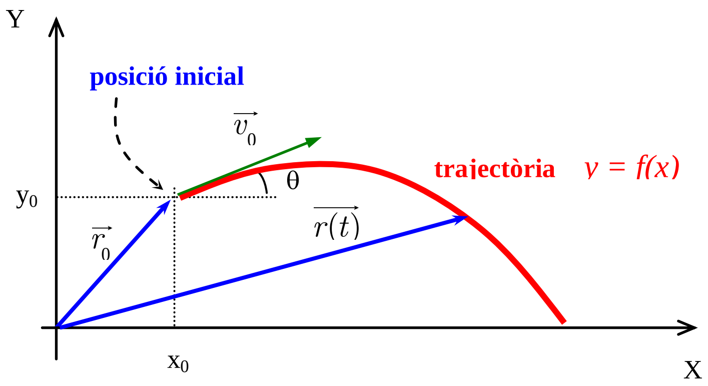
Els desplaçaments horitzontals i verticals de la partícula els podem representar per:

$$\left.\begin{aligned} r_x(t) &= x_0 + \left(v_0 \cdot \cos\theta\right) \cdot t \\ r_y(t) &= y_0 + \left(v_0 \cdot \sin\theta\right) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \quad \overrightarrow{r(t)} = \left\langle x_0 + \left(v_0 \cdot \cos\theta\right) \cdot t, y_0 + \left(v_0 \cdot \sin\theta\right) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right\rangle$$

Observem que el vector de posició $\overrightarrow{r(t)}$ té dos components (moviment en un pla) independents que són funcions dels temps.

Si volem dibuixar sobre el pla la trajectòria del moviment de la partícula haurem de saber en cada instant quan val el vector de posició. Això es pot fer eliminant el paràmetre t i troben la funció que relaciona les variables x i y . El que tenim, llavors, s'anomena equació de la trajectòria.

Exemple.



Llencem una pilota amb una velocitat inicial de 50 m/s formant un angle de 37° respecte l'horitzontal. Determineu el temps total que la pilota restarà a l'aire i la distància horitzontal que recorrerà, tot fent servir l'aproximació $g= 10\ m/s^2$.

Les components de la velocitat inicial són:

$$\vec{v}_0 = \langle 50 \cdot \cos 37^o , 50 \cdot \sin 37^o \rangle = \langle 40, 30 \rangle \ {}^{m}/_{s}$$

Les component del vector de posició són:

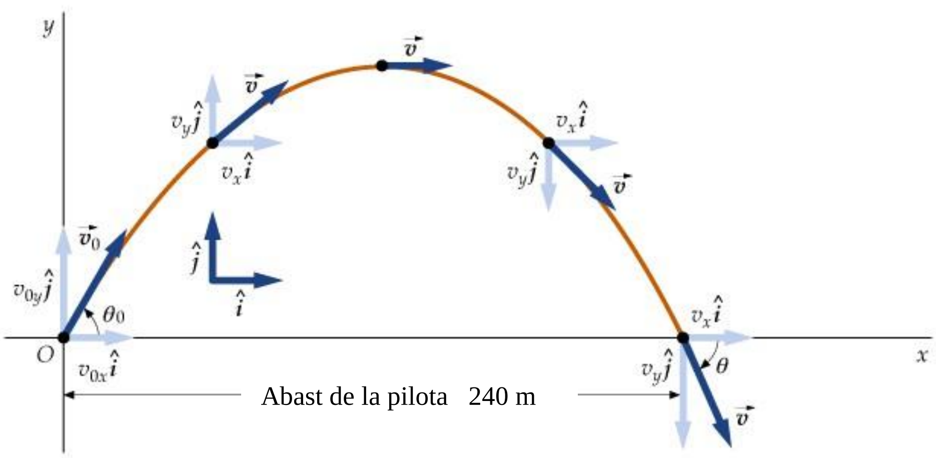
$$\vec{r(t)} = \left\langle 40 \cdot t \, , 30 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right\rangle = \langle 40 \cdot t \, , 30 \cdot t - 5 \cdot t^2 \rangle$$

Trobarem el temps total de la pilota a l'aire , calculant el temps en que la components vertical del vector de posició torna a ser zero:

$$30t - 5t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t(30 - 5t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 6\ s \end{cases}$$

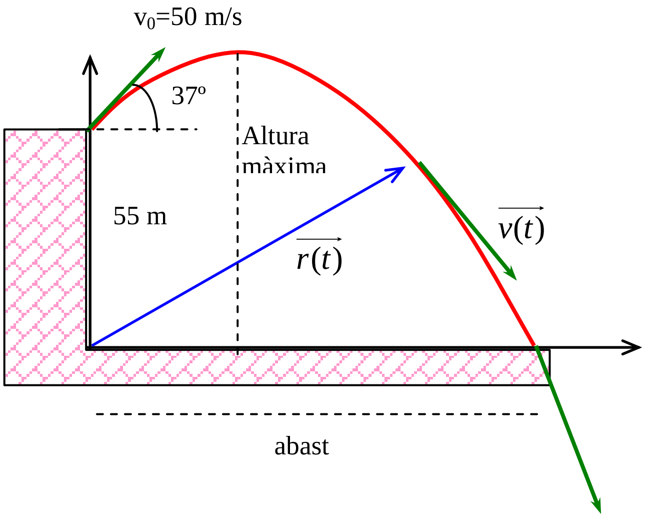
En aquests instant la posició horitzontal de la pilota és:

$$\begin{cases} per \quad t_1 \quad , \quad x_1 = \ 0 \\ per \ t_2 \quad , \quad x_2 = \ 40 \cdot 6 \ = \ 240 \ m \end{cases}$$



Exemple

Si ara es llença la pilota igual que abans però des d'una altura de 55 m, a quina distància caurà a terra.



Les components de la velocitat inicial són:

$$\overrightarrow{v_0} = \langle 50{\cdot}\cos 37^o, 50{\cdot}\sin 37^o \rangle = \langle 40, 30 \rangle \, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Les component del vector de posició són:

$$\overrightarrow{r(t)} = \left\langle 40{\cdot}t \,,\, 55 + 30{\cdot}t - \frac{1}{2}{\cdot}g{\cdot}t^2 \right\rangle = \langle 40{\cdot}t \,,\, 55 + 30{\cdot}t - 5{\cdot}t^2 \rangle$$

Trobarem el temps total de la pilota a l'aire , calculant el temps en que la components vertical del vector de posició és zero:

$$55 + 30t - 5t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 6t - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6 \pm \sqrt{36+44}}{2} = \begin{cases} t_1 = 3 + 2\sqrt{5} > 0 \\ t_2 = 3 - 2\sqrt{5} < 0 \end{cases}$$

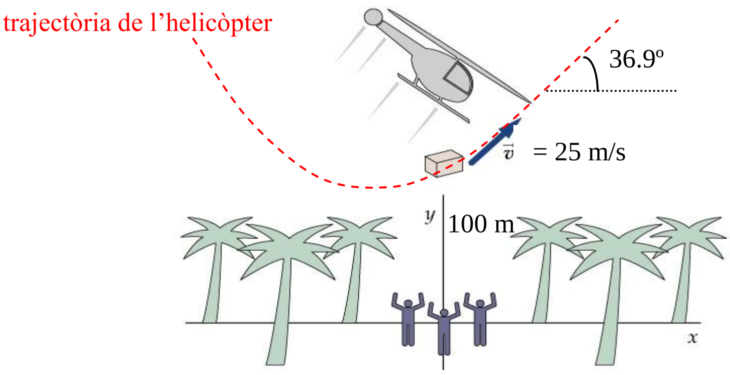
En aquests instant la posició horitzontal de la pilota és:

$$\overrightarrow{r(t_1)} = \langle 40{\cdot}t_1 \,,\, 0 \rangle = \left\langle 40{\cdot}\left(3 + 2\sqrt{5}\right), 0 \right\rangle = \langle 298.9\, m \,,\, 0 \rangle$$

Exemple

Un helicòpter deixa caure a la selva un paquet . En el moment de llençar el paquet, l'helicòpter es troba a 100 m sobre terra, volant a 25 m/s i formant un angle de 36.9º amb l'horitzontal.

Determineu on caurà el paquet, quina és la posició de l'helicòpter en aquest instant, suposant que està volant a velocitat constant.



Les components de la velocitat inicial són:

$$\overrightarrow{v_0} = \langle 25{\cdot}\cos 36.9^o, 25{\cdot}\sin 36.9^o \rangle = \langle 20, 15 \rangle \, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Les component del vector de posició són:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle 20{\cdot}t \,,\, 100 + 15{\cdot}t - 5{\cdot}t^2 \rangle$$

Trobarem el temps total del paquet a l'aire , calculant el temps en que la components vertical del vector de posició és zero:

$$100+15t-5t^2=0 \quad \Rightarrow \quad t^2-3t-20=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{3\pm\sqrt{9+80}}{2}=\begin{cases} t_1=6.21>0 \\ t_2=-3.21<0 \end{cases}$$

En aquests instant la posició horitzontal del paquet és:

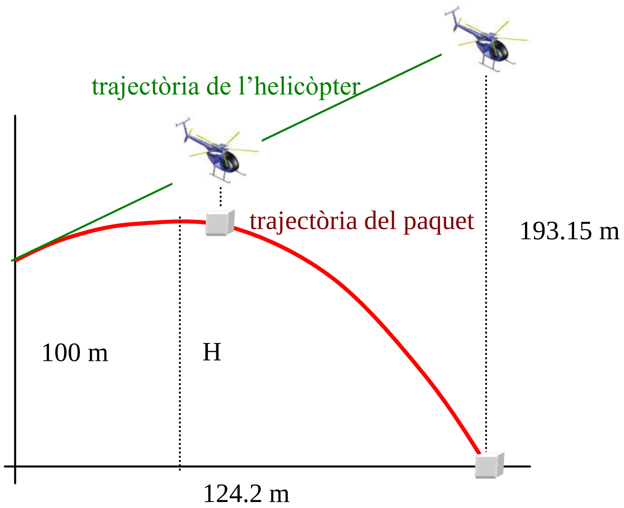
$$\overrightarrow{r(t_1)}=\langle 20\cdot t_1\,,0\rangle=\langle 20\cdot 6.21\,,0\rangle=\langle 124.2\,m\,,0\rangle$$

Durant aquest temps la posició de l'helicopter serà:

$$\overrightarrow{r_H(t)}=\langle 20\cdot t,100+15\cdot t\rangle=\langle 20\cdot 6.21,100+15\cdot 6.21\rangle=\langle 124.2m,193.15m\rangle$$

Observem que l'helicòpter està en la mateixa posició horitzontal que el paquet en tot instant.

Per determinar la màxima altura , H , de la trajectòria del paquet, haurem de veure en quin



instant la component vertical del vector velocitat és zero, ja que en aquest punt el vector velocitat (que és tangent a la trajectòria) , és horitzontal:

$$\overrightarrow{v(t)}=\frac{d\overrightarrow{r(t)}}{dt}=\frac{d}{dt}\langle 20\cdot t\,,100+15\cdot t-5\cdot t^2\rangle=\left\langle \frac{d(20t)}{dt},\frac{d(100+15\cdot t-5\cdot t^2)}{dt}\right\rangle$$

$$\overrightarrow{v(t)}=\langle 20\,,15-10t\rangle \quad m/s$$

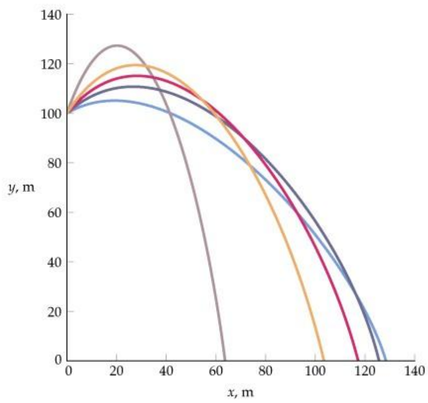
La component vertical del vector velocitat ha de ser zero:

15 – 10 ·t = 0 , t = 1.5 s

En aquest instant l'altura (component vertical del vector de posició serà:

$H = 100 + 15\cdot 1.5 - 5\cdot 1.5^2 = 111.25\ m$

Hem de saber que si canviem l'angle de llançament , el punt d'arribada canviarà, malgrat el mòdul de la velocitat sigui el mateix.



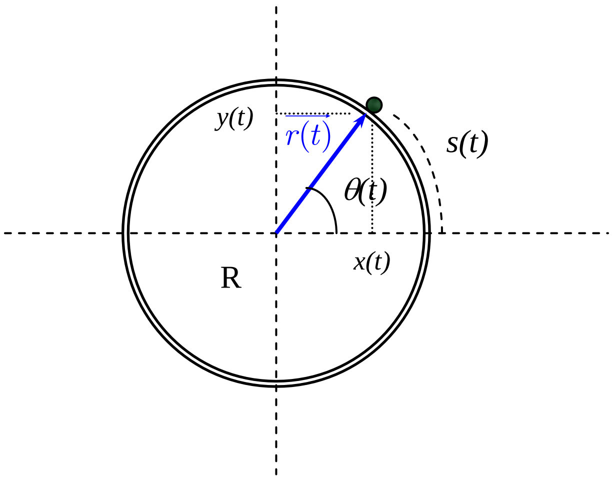
MOVIMENT AMB TRAJECTÒRIA CIRCULAR

Volem estudiar el moviment d'una partícula que es mou amb una trajectòria circular.

Suposem que la trajectòria que descriu un punt P és una circumferència de radi R.

Podem considerar varies formes de localitzar la posició de la partícula en cada instant:

- A través del vector de posició $\overrightarrow{r(t)} = x(t)\cdot\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j}$ referit a un sistema de referència rectangular amb origen al centre de la circumferència.
- Mitjançant el camí recorregut per sobre de la circumferència, *s(t)* .
- O bé, mitjançant l'angle en que s'observa la posició de la partícula des del centre de la circumferència en cada instant , $\theta(t)$.



La forma més còmoda d'estudiar el moviment en trajectòria circular és amb el **desplaçament angular θ(t).**

Observem les relacions entre les components del vector de posició $\overrightarrow{r(t)} = x(t)\cdot\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j}$, i el desplaçament angular:

$$\begin{cases} x = R\cdot\cos\theta \\ y = R\cdot\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

La relació entre el desplaçament angular $\theta(t)$ i el desplaçament per la trajectòria *s(t)* , per definició de la unitat de mesura d'angles en el S.I. (radià), és:

$$s = R\cdot\theta$$

Estudiar el moviment de la partícula P a través de les magnituds angulars simplifica l'estudi al del moviment unidimensional .

Definim ***velocitat angular*** de la mateixa manera que vam definir la velocitat instantània en una dimensió:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad (\text{ rad/s})$$

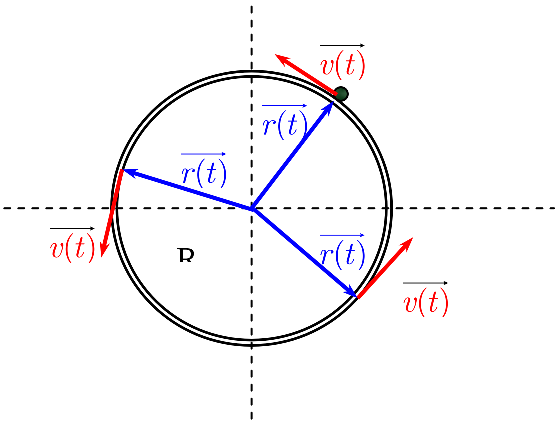
i ***acceleració angular*** :

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \qquad (\text{ rad/s}^2\text{ })$$

Observem que el mòdul del vector de posició de la partícula és sempre el mateix, llavors com hem demostrat anteriorment, el vector velocitat

$$\overrightarrow{v(t)} = v_x(t)\cdot\hat{i} + v_y(t)\cdot\hat{j} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\hat{j}$$

en cada punt és perpendicular al vector de posició. Aquesta deducció és lògica , ja que el vector de posició coincideix sempre amb el radi de la circumferència descrita i el vector velocitat sempre és tangent a la trajectòria.



Ara ja sabem quina és la direcció del vector velocitat en cada punt de la seva trajectòria i ens interessa saber quin serà el seu mòdul.

De la relació entre el desplaçament *s(t)* i el desplaçament angular *θ(t)* ho podem deduir:

$$v = \left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[R\cdot\theta(t)\right] = R\cdot\frac{d\theta(t)}{dt} = R\cdot\omega$$

En un moviment circular el vector velocitat sempre canvia, ja que en cas de que el seu mòdul sigui constant, la seva direcció està variant contínuament. Per aquesta raó sempre hem de parlar d'acceleració en un moviment circular.

Una forma de calcular-la seria derivant el vector velocitat:

$$a(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\cdot\hat{j} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\cdot\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\cdot\hat{j} = a_x\cdot\hat{i} + a_y\cdot\hat{j}$$

Però aquestes component no tenen sentit físic interessant.

Més interessant serà trobar un valor de l'acceleració que ens digui com canvia el mòdul del vector velocitat i un altre valor de l'acceleració que ens indica la forma en que canvia la direcció del vector velocitat.

COMPONENTS TANGENCIAL I NORMAL DE L'ACCELERACIÓ

Com el vector velocitat és sempre tangencial a la trajectòria ,podem definir un vector unitari en la direcció de la tangent:

$$\hat{\tau} = \frac{\overrightarrow{v(t)}}{\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}$$

Podem escriure: $\overrightarrow{v(t)} = \left|\overrightarrow{v(t)}\right| \cdot \hat{\tau} = \frac{ds(t)}{dt} \cdot \hat{\tau}$

El vector unitari en la direcció de la tangent , $\hat{\tau}$, és un vector de mòdul contant, però la seva direcció canvia en el temps, canvi que és més ràpid quan més ràpid es mogui el punt P.

Com sabem la derivada d'un vector de mòdul constant és un altre vector perpendicular a ell, en aquest cas serà un vector en la direcció del radi (normal a la trajectòria):

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} \quad \text{vector} \quad \perp \quad \text{a} \quad \hat{\tau}$$

El canvi de direcció de $\hat{\tau}$ depèn de dues coses :

La rapidesa del moviment

El valor del radi de curvatura (radi de la trajectòria circular, R)

Podem escriure llavors que $\frac{d\hat{\tau}}{dt}$ és proporcional a la velocitat del moviment , v , i és inversament proporcional al radi de la trajectòria:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{R} \cdot \hat{n}$$

Podem ara determinar l'acceleració del punt P en funció de les seves components en la direcció de la tangent i en la direcció de la normal:

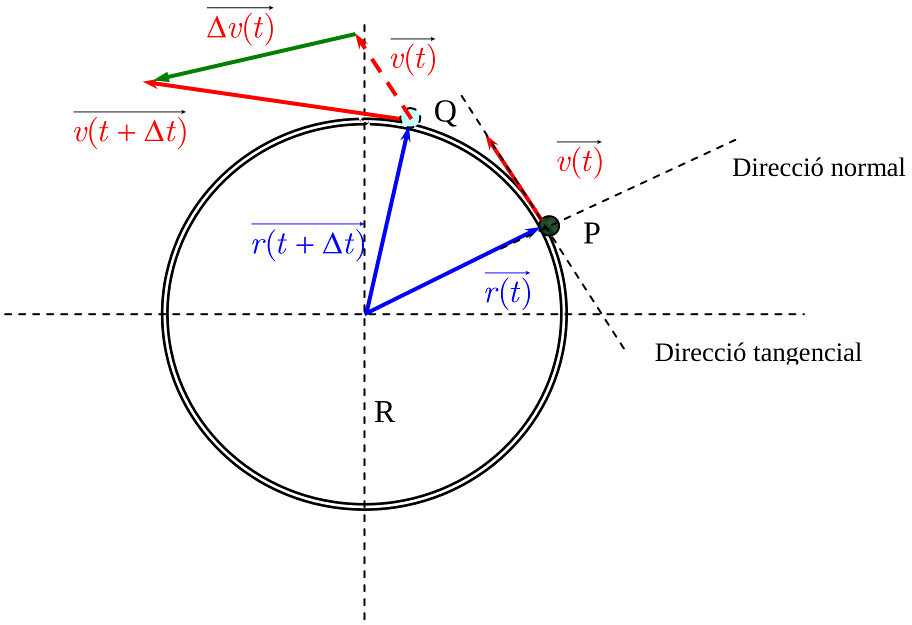
$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{v(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds(t)}{dt} \cdot \hat{\tau}\right] = \left(\frac{d}{dt}\frac{ds(t)}{dt}\right) \cdot \hat{\tau} + \frac{ds(t)}{dt} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} =$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left|\overrightarrow{v(t)}\right|\right) \cdot \hat{\tau} + \left(\frac{ds(t)}{dt}\right) \cdot \frac{\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{R} \cdot \hat{n} = \left(\frac{d}{dt}\left|\overrightarrow{v(t)}\right|\right) \cdot \hat{\tau} + \left|\overrightarrow{v(t)}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{R} \cdot \hat{n} = \frac{d\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{dt} \cdot \hat{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{n}$$

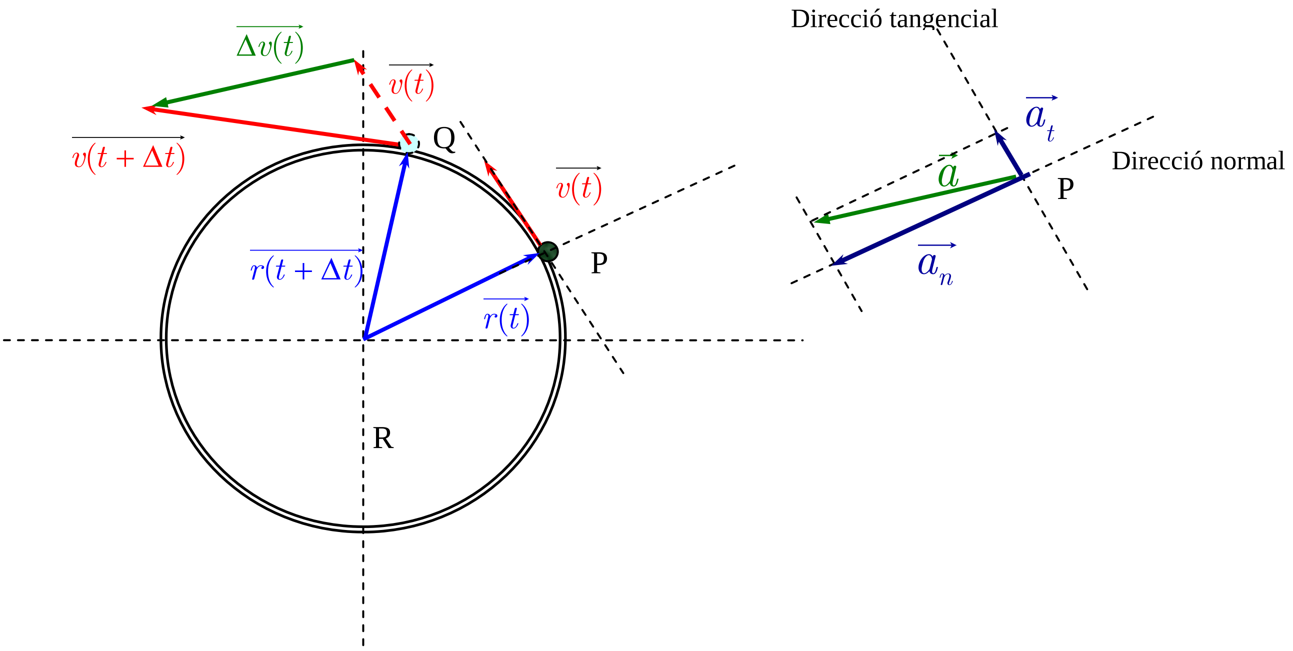
Sabem que: $v = \left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[R \cdot \theta(t)\right] = R \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = R \cdot \omega$

I per tant: $$\frac{d\left|\overrightarrow{v(t)}\right|}{dt} = \frac{d}{dt}\left[R\cdot\omega(t)\right] = R\cdot\frac{d\omega(t)}{dt} = R\cdot\alpha$$

Podem escriure llavors: $$\overrightarrow{a(t)} = (R\cdot\alpha)\cdot\hat{\tau} + \left(\frac{v^2}{R}\right)\cdot\hat{n}$$



Quan $\Delta t \to 0$ el punt Q tendeix al punt P , com que $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$, la direcció del vector $\overrightarrow{\Delta v}$ ens dona la direcció del vector acceleració. Si aquest el descomposem en les direccions tangencial i normal, ens dóna les ***components intrínseques del vector acceleració.***



Per tant podem afirmar que els canvis en mòdul del vector velocitat venen donats per la component tangencial del vector velocitat anomenada ***acceleració tangencial***

$$a_t = R\cdot\alpha$$

i els canvis en direcció del vector velocitat venen donats per la component normal del vector acceleració , anomenada ***acceleració normal o centrípeta***:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2\cdot R$$

$$\boxed{\overrightarrow{a(t)} = a_t\cdot\hat{\tau} + a_n\cdot\hat{n}}$$

MOVIMENT CIRCULAR UNIFORME

Si el ritme del moviment del punt P seguint una trajectòria circular de radi R és constant, direm que el moviment és circular uniforme.

En aquest moviment el mòdul del vector velocitat és constant $\left|\overrightarrow{v(t)}\right| = v$

i com $v = R\cdot\omega$ també serà constant la velocitat angular.

Si la posició angular inicial de la partícula ve donada per θ_0 , la posició de la partícula en cada instant serà:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad\Rightarrow\quad d\theta = \omega\cdot dt \quad\Rightarrow\quad \theta = \int \omega\cdot dt = \omega\cdot t + K$$

determinem la constant d'integració amb la condició inicial : per $t = 0$, $\theta = \theta_0$

$$\theta_0 = \omega\cdot 0 + K \quad\Rightarrow\quad K = \theta_0$$

quedant: $\theta = \omega\cdot t + \theta_0$

Com que el mòdul del vector velocitat és constant , aquest moviment té una acceleració tangencial zero. (També ho podíem deduir del fet de que $\omega = cte$ llavors $\alpha = 0$) .

$$a_t = 0 \quad\Rightarrow\quad com \quad a_t = R\cdot\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0$$

Però el vector velocitat canvia contínuament de direcció, per tant existeix la component normal del vector acceleració:

Acceleració normal , $a_n = \omega_2\cdot R = \frac{v_2}{R} = cte$

Que serà constant ja que la velocitat angular ho és.

MOVIMENT CIRCULAR UNIFORMEMENT ACCELERAT

Quan la partícula P es mou amb una acceleració angular constant, direm que descriu un moviment circular uniformement accelerat.

Per trobar les equacions que ens permeten saber la velocitat angular de la partícula en cada instant i la seva posició angular, necessitarem tenir alguna informació, com per exemple la velocitat angular i la posició angular inicials: ω_0 i θ_0 .

Com: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad d\omega = \alpha \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \int \alpha \cdot dt = \alpha \cdot t + K_1$

per t = 0 , $\omega = \omega_0$, llavors : $\omega_0 = \alpha \cdot 0 + K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \omega_0$

i la velocitat angular vindrà donada per: $\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$

Com : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad d\theta = \omega \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \int \omega \cdot dt = \int (\alpha \cdot t + \omega_0) \cdot dt = \dfrac{1}{2} \alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + K_2$

determinarem la constant d'integració K_2 amb la condició inicial :

per $t = 0$, $\theta = \theta_0$.

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 0^2 + \omega_0 \cdot 0 + K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \theta_0$$

i la posició angular del punt P podrà calcular-se per: $\theta = \dfrac{1}{2} \alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0$